La *formula di Eulero* (1765) - *Binet* (1843) ricavata elementarmente

Partiamo dalla definizione dei *numeri di Fibonacci*

$f(0) = 0, f(1) = 1, f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ per $n > 1$. (*)

1) $f(n) = f(n-1) + f(n-2) \leq 2\ f(n-1)$ per n abbastanza grande

(di fatto, per $n > 1$): il *metodo iterativo* ci dà quindi

$f(n) \leq 2\ f(n-1) \leq 2 \cdot 2 \cdot f(n-2) \leq \ldots \leq 2^k\ f(n-k) \leq \ldots \leq 2^{n-1}\ f(1)$, ovvero $f(n) = O(2^n)$.

2) Ma non può essere $f(n) = c \cdot 2^n$, perché $c \cdot 2^n = c \cdot 2^{n-1} + c \cdot 2^{n-2} = 3\ c \cdot 2^{n-2}$ dà $4\ c = 3\ c$, vero solo per $c = 0$.

Esiste invece una base $\Phi \neq 2$ per cui valga (*)?

Dovrà valere $c \cdot \Phi^n = c \cdot \Phi^{n-1} + c \cdot \Phi^{n-2}$, ossia $\Phi^2 = \Phi + 1$ (**) che ha soluzioni $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$ e $\Phi' = (1 - \sqrt{5})/2 \approx -0.618$ (Φ = *rapporto aureo*).

3) Se prendiamo $f(n) = c \cdot \Phi^n + c' \cdot \Phi'^n$, abbiamo 2 costanti c e c' a disposizione per i due valori iniziali $f(0) = c + c' = 0$ e $f(1) = c \cdot \Phi + c' \cdot \Phi' = 1$. Dalla prima ricaviamo $c' = -c$, dalla seconda $f(1) = c \cdot (\Phi - \Phi') = 1$ ricaviamo $c = 1/\sqrt{5}$, dato che $\Phi - \Phi' = \sqrt{5}$. Dunque

$$\boxed{f(n) = 1/\sqrt{5}\ (\Phi^n - \Phi'^n)}$$

che è la formula cercata.

4) In conclusione, $f(n) = \Theta(\Phi^n)$, e anche $f(n) = \lfloor 0.5 + \Phi^n/\sqrt{5} \rfloor$, dato che $|\Phi'^n| < 1$, $\Phi'^n \to 0$ e i segni si alternano.

5) Come mai $1/\sqrt{5}\ (\Phi^n - \Phi'^n)$ è sempre *esattamente intero*? A causa dell'equazione (**) $\Phi^2 = \Phi + 1$, che conviene interpretare come *riscrittura* $\Phi^2 \to \Phi + 1$. Quindi

$\Phi^3 = \Phi^2 \cdot \Phi = (\Phi + 1) \cdot \Phi = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\,\Phi + 1$,

$\Phi^4 = \Phi^3 \cdot \Phi = (2\,\Phi + 1) \cdot \Phi = 2\,\Phi^2 + \Phi = 2\,(\Phi + 1) + \Phi = 3\,\Phi + 2, \ldots$

in generale $\Phi^n = x\,\Phi + y$ con x e y *interi positivi* (che, per inciso, sono *numeri di Fibonacci consecutivi*), e la stessa cosa vale per l'altra soluzione di (**), $\Phi'^n = x\,\Phi' + y$, con gli *stessi* interi x e y.

Ne consegue che $\Phi^n - \Phi'^n = x\,\Phi + y - (x\,\Phi' + y) = x\,(\Phi - \Phi') = x\sqrt{5}$ e quindi che $1/\sqrt{5}\ (\Phi^n - \Phi'^n) = x$ è intero (e $x = f(n)$).

6) L'equazione (**) può essere interpretata come $\Phi \to 1 + 1/\Phi$ e iterando questa riscrittura abbiamo $\Phi = 1 + 1/\Phi = 1 + 1/(1 + 1/\Phi) = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/\Phi)) = \ldots$ che esprime Φ come una *frazione continua* con infiniti *quozienti* tutti uguali a 1 (si veda, per esempio, la pagina web http://www.math.unifi.it/~mugelli/promat/diofanto/fracont.htm).

Interpretando invece (**) come $\Phi \to \sqrt{(1 + \Phi)}$ otteniamo

$\Phi = \sqrt{(1 + \Phi)} = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \Phi)})} = \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \sqrt{(1 + \Phi)})})} = \ldots$,

un altro modo di ottenere il rapporto aureo…