APPUNTI INTRODUTTIVI ALLA LOGICA ALGEBRICA AGOSTO 2008

ALDO URSINI

1. Sommario

Ci occupiamo di logica proposizionale. Dopo un resoconto di alcune algebrizzazioni (logica classica, intuizionistica, BCK, modale S4, lineare), esponiamo la linea di ricerca ("abstract algebraic logic") aperta da Blok-Pigozzi, con cui si affronta il problema generale dell' algebrizzazione.

Per una lettura introduttiva (con bibliografia) si suggerisce l' articolo di R.Jansana ("Abstract Algebraic Logic") nell' enciclopedia online: plato.stanford.edu

Il testo di W.Blok-D.Pigozzi,*Algebraizable Logic* (Mem. AMS N.396) si reperisce online sul sito: orion.iastate.edu/dpigozzi. A volte lo citiamo nel seguito come "B-P".

Un survey sugli sviluppi successivi: Font-Jansana-Pigozzi, A survey of Abstract Algebraic Logic, in Studia Logica 74, 13-97, 2003; si trova online su

www.springerlink.com/content/q2p0758n741v1662/fulltex.pdf.

Le slides di un corso di lezioni, aggiornato al 2007, ("Abstract Algebraic Logic - An overview") di J.M.Font si trova in: www.mat.ub.es/ jmfont/unpub.html

---

Come premessa osserviamo che un linguaggio formale proposizionale L e' determinato dai suoi *connettivi logici*; questi non sono altro che *segni di operazione*; pertanto *le formule* di L non sono altro che *i termini* della segnatura determinata dai connettivi logici. Allora *le lettere proposizionali* $P_i (i \in \omega)$ non sono altro che *le variabili* $x_i (i \in \omega)$. Una *costante logica* non e' altro che un segno di costante.

Per esempio, le formule proposizionali classiche sono gli elementi dell' algebra assolutamente libera (termini) della segnatura:

$$(*) \qquad \bot, \top, \wedge, \vee, \rightarrow$$

(o similmente se si scelgono altri connettivi/costanti di partenza). Insomma, la 'formula proposizionale'

$$A \vee (B \rightarrow \bot)$$

va utilmente identificata con il termine

$$x \vee (y \rightarrow \bot)$$

Date: Agosto 2008.

(se le variabili proposizionali A, B, C sono denotate come $x, y, z, \ldots$)

Questa identificazione non e' alcunche' di cervellotico, essa era ben presente a George Boole, ed e' molto comoda ad evitare di introdurre tutta una burocrazia di traduzioni unicamente formali dal linguaggio formale proposizionale a quello dell' algebra e viceversa.

2. Logica classica

É ben noto che

- le algebre di Boole costituiscono una 'semantica algebrica' che e' completa per la logica classica.

Cosa vuol dire semantica algebrica ? Visto che le formule sono termini della segnatura $(*)$, vuol dire che dobbiamo considerare una classe K di algebre di questa segnatura. Un' algebra $A \in K$ permette di avere un' interpretazione dei termini (=formule proposizionali) a partire da qualunque assegnazione in A per le variabili (= lettere proposizionali). Qual'e' la classe giusta? (E, inoltre, ce n'e' una sola?) Vogliamo che la teoria algebrica della classe K 'corrisponda' alla logica proposizionale classica. In che senso?

Per esempio, come deve comportarsi in K un termine t che, quale formula proposizionale, sia un teorema del calcolo proposizionale classico (ossia, via teorema di completezza) una tautologia)?

In questo caso la risposta e' semplice: nella logica classica la costante $\top$ e' usata allo scopo di rappresentare un formula che sia un teorema logico: avremo che $\top$ e' un assioma logico; oppure (in deduzione naturale) avremo la regola:

$$\frac{}{\top};$$

mentre nella usuale semantica Vero/Falso, la costante si interpreta sempre come Vero. Nella nostra algebra A, avremo quindi l' elemento $\top_A$ che e' la lettura della costante $\top$; allora e' naturale richiedere che il dato "t e' una tautologia" corrisponda, per $A \in K$, al fatto che :

$$A \models t \approx \top.$$

In vista della "completezza algebrica", dovremo poi assicurarci anche che *se* per ogni $A \in K$

$$A \models t \approx \top$$

allora t e' una tautologia.

Prendiamo la situazione piu' generale

$$\Gamma \vdash t$$

(Γ un insieme di formule, t una formula). Questo significa che l'apparato formale della logica permette di dedurre formalmente la conclusione t da premesse appartenenti a Γ (ci teniamo volutamente nel vago sul come sia presentato l' apparato deduttivo: alla

Hilbert, oppure in deduzione naturale, o calcolo dei sequenti ...). Ricordando il teorema di completezza, cio' equivale a dire che qualunque interpretazione nell' usuale semantica Vero/Falso che assegni Vero a tutte le formule di Γ deve assegnare Vero anche a t. Che vuol dire che le nostre algebre $A \in K$ rispettino questa situazione? Un momento di riflessione porta a concludere che dobbiamo richiedere:

$$(o) \qquad \{p \approx \top | p \in \Gamma\} \models_K t \approx \top,$$

dove $\models_K$ e' l'usuale relazione di 'conseguenza semantica' tra un insieme di formule del primo ordine (in questo caso: identita') ed una formula del primo ordine determinata dalla classe K. E, per la completezza, richiederemo anche che *se* vale (o) *allora* $\Gamma \vdash t$.

Nel caso della logica classica una classe di algebre che rispetta tutti questi requisiti esiste e si compone di una sola piccola algebra

$$K_0 := \{\mathbf{2}\}$$

in cui l' insieme base e' quello dei valori di verita' $2 := \{0, 1\}$ e le operazioni della segnatura $(*)$ si realizzano secondo la usuali tavole di verita' ($\bot_2 = 0; \top_2 = 1; a \vee b := max\{a, b\}$; etc).

La cosa e' ovvia,... modulo il teorema di validita' e completezza del calcolo proposizionale classico. Infatti, con questo teorema, $\Gamma \vdash t$ equivale a $\Gamma \models t$ (nella semantica del Vero/Falso: tutte le assegnazioni che valutano le formule di Γ in Vero, valutano anche t in Vero); ma questo non e' altro che una rilettura del fatto algebrico: $\{p \approx \top | p \in \Gamma\} \models_{\mathbf{2}} t \approx \top$.

Due questioni:

1. E' necessario "trascurare" l'apparato formale deduttivo e passare tramite il teorema di completezza?

2. Che interesse ha una siffatta "traduzione in termini astrusi" (pseudo algebrici) ? Cioe', che interesse ha la classe K_0???

Cominciamo dal punto 2. Quello che serve, per avere una vera e propria trattazione algebrica, e' di conoscere delle proprieta' algebriche caratteristiche dell' algebra $\mathbf{2}$. E qui interviene potentemente il teorema di Stone: la varieta' generata da 2 e' la varieta' delle Algebre di Boole; anzi, siccome ogni algebra di Boole e' in $\mathbf{SP}(\mathbf{2})$, la quasi-varieta' delle algebre di Boole e' generata dall' algebra $\mathbf{2}$. La classe delle algebre di Boole e' definita da assiomi (equazionali),e' ben studiata ed e' un interessante capitolo dell' algebra astratta; pertanto e' un' ottima candidata ad essere battezzata quale una "semantica algebrica" per la logica proposizionale.

Cio' concettualmente vuol dire che abbiamo un interpretazione dell'apparato deduttivo classico nelle algebre di Boole: possiamo utilizzare le algebre di Boole per ottenere risultati sulla logica. Per un esempio banale:

Es1. (?) $A \to C, B \to C \vdash (A \vee B) \to C$.

Infatti in qualunque algebra di Boole, se $a \to c = \top, b \to c = \top$ allora $a \leq c, b \leq c$; pertanto $a \vee b \leq c$, ossia $(a \vee b) \to c = \top$.

Riassumendo, scriviamo $\Gamma \approx \top$ per l insieme di equazioni $\{p \approx \top | p \in \Gamma\}$, $\vdash_C$ per la relazione di deducubilita' nel calcolo proposizionale classico e ponendo BA per la classe delle algebre di Boole, avremo il

Teorema di completezza algebrico:

$$\Gamma \vdash_C t \qquad \text{se e solo se } \Gamma \approx \top \models_{BA} t \approx \top \qquad \text{se e solo se} \quad \Gamma \approx \top \models_{\mathbf{2}} t \approx \top$$

DIM (A) La dimostrazione implicita nel discorso precedente faceva uso dell'usuale teorema di completezza (semantica Vero-Falso): questo ci dava:

$$(1) \qquad \Gamma \vdash_C t \qquad \text{se e solo se } \Gamma \approx \top \models_{\mathbf{2}} t \approx \top$$

D' altra parte (teorema di Stone) l'algebra $\mathbf{2}$ genera anche come quasi-varieta' la classe $BA = \mathbf{SPP_u}(\mathbf{2})$, per cui:

$$\Gamma \approx \top \models_{BA} t \approx \top \quad \text{ se e solo se } \Gamma \approx \top \models_{\mathbf{2}} t \approx \top$$

DIM (B). Possiamo seguire un' altra via che evita l' usuale teorema di completezza, anzi tale che questo (nella forma (1)) ne risulti un corollario.

–Si introduce l'equivalenza di Lindenbaum-Tarski:

$$p \equiv_\Gamma q \qquad \text{se e solo se } \Gamma \vdash_C (p \to q) \wedge (q \to p)$$

–Si fa vedere che essa e' una congruenza dell' algebra delle formule $\mathbf{Fm}$ (=termini).

–Si controlla che il quoziente $\mathbf{Fm} /\equiv_\Gamma$ e' in effetti un'algebra di Boole.

–Si nota che $\vdash_C t \leftrightarrow (t \leftrightarrow \top)$. Abbreviamo $\{q \leftrightarrow t | q \in \Gamma\}$ come $\Gamma \leftrightarrow \top$. Abbiamo allora $\Gamma \vdash_C t$ se e solo se $\Gamma \leftrightarrow \top \vdash_C t \leftrightarrow \top$ se e solo se $t \equiv_\Gamma \top$. Ne segue allora:

$$(2) \quad \Gamma \vdash_C t \qquad \text{se e solo se } \Gamma \approx \top \models_{BA} t \approx \top.$$

Poi col teorema di Stone si ricava l' altra equivalenza (1).

NOTE.

L' interpretazione (2) indica la presenza di una equazione chiave: $x \approx \top$ per passare da formule (termini) a equazioni.

Questo suggerisce una definizione generale (Blok-Pigozzi) : la classe K di algebre e' una *semantica algebrica* per una logica L se esiste un sistema (finito) di identita' in una variabile $d_i \approx e_i, i = 1, \ldots, n$ tale che

$$\Gamma \vdash_L t$$

se e solo se per ogni $i = 1, \ldots, n$

$$\{d_i(p) \approx e_i(p) | i = 1, \ldots, n; p \in \Gamma\} \models_K d_i(t) \approx e_i(t)$$

Nel caso di logica classica-algebra di Boole, abbiamo anche una interpretazione dell' algebra nella logica: infatti consideriamo le formule (con due variabili x, y):

$$\Delta_1(x,y) := x \to y, \Delta_2(x,y) := y \to x$$

ed avremo, per un insieme E di equazioni e per la classe K delle algebre di Boole:

$$E \models_{BA} t = q \quad \text{se e solo se} \quad \{\Delta_1(r,s), \Delta_2(r,s) | r \approx s \in E\} \vdash_C \Delta_1(t,q) \wedge \Delta_2(t,q)$$

ed anche, per ogni formula (termine) t :

$$t \dashv\vdash_C \Delta_1(t,\top) \wedge \Delta_2(t,\top)$$

In termini generali, diremo che le algebre di Boole sono una semantica algebrica *equivalente* per la logica classica. Secondo Blok-Pigozzi, per questo motivo, la logica classica si puo' dire una logica *algebrizzabile*.

3. Altre logiche

1.**Logica intuizionistica**.

Il linguaggio formale e' della segnatura:

$$\perp, \wedge, \vee, \to, \neg.$$

(Volendo, si puo' definire $\top := \perp \to \perp$.)

L' apparato deduttivo si puo' presentare in varii modi. Ricordiamo qui (Gentzen) le REGOLE DELLA DEDUZIONE NATURALE PROPOSIZIONALE INTUIZIONISTICA

Introduzione ed eliminazione della congiunzione

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{I} \qquad \frac{A \wedge B}{A} \wedge \mathrm{E} \qquad \frac{A \wedge B}{B} \wedge \mathrm{E}$$

Introduzione ed eliminazione della disgiunzione

$$\frac{A}{A \vee B} \vee \mathrm{I} \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee \mathrm{I} \qquad \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]^1 \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]^2 \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C} \vee \mathrm{E}(1)(2)$$

Introduzione ed eliminazione dell'implicazione

$$\frac{\begin{matrix}[A]^1 \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B} \to \mathrm{I}(1) \qquad \frac{A \quad A \to B}{B} \to \mathrm{E}$$

Regola del falso (ex falso quodlibet)

$$\frac{\bot}{A}\bot$$

Introduzione ed eliminazione della negazione

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]^1\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg A}\neg\mathrm{I}(1) \qquad\qquad \dfrac{A \quad \neg A}{\bot}\neg\mathrm{E}$$

La logica classica si ottiene aggiungendo per esempio la regola "reductio ad absurdum" RAA:

$$\dfrac{\begin{matrix}[\neg A]^1\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{A}\mathrm{RAA}$$

Con $\Gamma \vdash_I t$ si esprime ora che esiste un albero di deduzione di conclusione t e le cui premesse non scaricate appartengono a Γ. (Le nozioni di albero di derivazione e di scarico di premesse si suppongono note al lettore ...)

Questa volta la semantica algebrica equivalente e' fornita dalla varieta' delle *algebre di Heyting* HA : si ottiene il TEOREMA DI COMPLETEZZA (ALGEBRICO) DIRETTO ED INVERSO (le formule Δ_i sono le stesse che per il caso classico):

1.

$$\Gamma \vdash_I t \qquad \text{se e solo se } \Gamma \approx \top \models_{HA} t \approx \top$$

2.

$$E \models_{HA} t = q \quad \text{se e solo se} \quad \{\Delta_1(r,s), \Delta_2(r,s) | r \approx s \in E\} \vdash_I \Delta_1(t,q) \wedge \Delta_2(t,q)$$

ed anche, per ogni formula (termine) t :

$$t \dashv\vdash_I \Delta_1(t,\top) \wedge \Delta_2(t,\top)$$

La dimostrazione (di 1.) seguirebbe il metodo di Lindenbaum-Tarski.

NOTE.

1. Questa volta non esiste una singola algebra finita che generi la varieta' HA (Gödel). L 'insieme di tutte le algebre di Heyting finite genera la varieta' ("proprieta' del modello finito").

2.Esiste una famosa semantica relazionale per la logica intuizionistica (la *semantica di Kripke*). Essa e' strattamente imparentata con la teoria della rappresentazione per le algebre di Heyting (Stone). Intanto, un esempio tipico di algebra di Heyting (che raramente sia un' algebra di Boole) si ottiene considerando la famiglia $O(T)$ degli aperti di uno spazio topologico T; si prende $\bot := \emptyset$; le operazioni $\wedge, \vee$ sono l' intersezione ed uninione insiemistiche; si definisce poi per due aperti A, B :

$$\neg A := Int(T \setminus A)$$

$$A \to B := Int(B \cup (T \setminus A)),$$

dove $Int(X)$ denota l' interno (topologico)di $X \subseteq T$. Si vede subito che $\top = T$, e che si tratta di un' algebra di Heyting. Le regole del calcolo $\vdash_I$ sono rispettate da ogni interpretazione in una qualunque algebra di Heyting ("validita'"). Gia' questo permette di vedere che per esempio, la formula $x \vee \neg x$ non e' dimostrabile (basta assegnare a x l 'insieme $(0, +\infty)$ nello spazio dei numeri reali). Si ha il basilare

Teorema di rappresentazione di Stone: Ogni algebra di Heyting si puo' immergere nell' algebra degli aperti di uno spazio topologico che sia T_0, compatto e dotato di una base di aperti compatti.

2.**Logica** BCK.

Il linguaggio prevede solo il connettivo $\to$. Si presenta con gli assiomi:

$$(B) p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$$

$$(C)(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$$

$$(K) p \to (q \to p)$$

(la nomenclatura risale alla logica combinatoria ...). C'e' solo la regola di inferenza del *modus ponens*:

$$\frac{p \qquad p \to q}{q}$$

La semantica algebrica equivalente e' fornita dalla quasi-varieta' delle BCK-algebre: sono definite dalle identita' e quasi identita' seguenti (si pone: $1 := w \to w$)

(1) $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to y)) \approx 1$
(2) $1 \to x \approx x$
(3) $x \to 1 \approx 1$
(4) $x \to y \approx 1 \wedge y \to x \approx 1 \Rightarrow x \approx y$.

(É presto visto che si ricava $x \to x \approx 1$ per ogni x.)

La relazione di Lindenbaum-Tarski e'

$$p \equiv_\Gamma q \qquad \text{se e solo se} \quad \Gamma \vdash p \to q \qquad \text{e} \quad \Gamma \vdash q \to p$$

Se ne ricava ancora il

teorema di completezza algebrico diretto ed inverso (N.B. Se Γ, Δ sono insiemi di formule, con $\Gamma \vdash_L \Delta$ intendiamo che :$\Gamma \vdash p$ per ogni $p \in \Delta$):

1.

$$\Gamma \vdash_{BCK} t \qquad \text{se e solo se} \quad \Gamma \approx \top \models_{BCK} t \approx \top$$

2.

$$E \models_{BCK} t = q \quad \text{se e solo se} \quad \{\Delta_1(r,s), \Delta_2(r,s) | r \approx s \in E\} \vdash_{BCK} \Delta_1(t,q) \wedge \Delta_2(t,q)$$

ed anche, per ogni formula (termine) t :

$$t \dashv\vdash_{BCK} \Delta_1(t, \top), \Delta_2(t, \top)$$

NOTE.

Si dimostra (Wronski) che la quasivarieta' BCK non forma una varieta'.

E' anche da notare che nella logica BCK non vale il teorema di deduzione usuale, ma solo in forma indebolita: poniamo $p \to^1 q := p \to q; p \to^{k+`1} := p \to)p \to^k q$; allora

$$\Gamma \cup \{p\} \vdash_{BCK} q \qquad \text{se e solo se} \quad \Gamma \vdash_{BCK} p \to^k q \quad \text{per qualche } k.$$

3.**Logica modale** $S4$.

La segnatura si ottiene da quella per la logica classica con l' aggiunta di un operatore modale unario $\Box$ ($\Box t$ si vuole intendere come "e' necessario che t"). Una presentazione di $S4$ alla Hilbert e' data dagli assiomi logici:

(1) ogni formula (di questo linguaggio) che sia istanza di un teorema (o di un assioma) proposizionale classico;
(2) $\Box p \to \Box\Box p$;
(3) $\Box p \to p$;
(4) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$;

e le due regole di inferenza
– *modus ponens;*
– ("necessitazione"):

$$\frac{p}{\Box p}.$$

La semantica algebrica per $S4$ e' fornita dalle *algebre di Boole topologiche* (Rasiowa-Sikorski): si tratta della varieta' definita dalle identita' seguenti (in campo algebrico si denota con I l' operatore unario modale):

(1) gli assiomi equazionali per l'algebra di Boole
(2) $I(1) = 1$;
(3) $I(a \wedge b) = I(a) \wedge I(b)$;
(4) $I(a) \leq a \wedge I(I(a))$.

(La nomenclatura e' giustificata dal fatto che gli assiomi sull' operatore I rispecchiano - nel caso l'algebra di Boole sia insiemistica- ben note proprieta' dell' operatore topologico di "interno"; tutto quadra poi mediante un teorema di rappresentazione ...)

Ancora una volta, la equivalenza di Lindenbaum-Tarski e' costruita al solito modo; si ha un teorema di completezza algebrico con il suo inverso.

NOTE.

1. In genere, anche nella logica modale *non vale* il solito teorema di deduzione: ovviamente avremo $p \vdash_{S4} \Box p$ ma in generale non possiamo concludere $\vdash p \to \Box p$, altrimenti, con un assioma concluderemmo che per $p \equiv \Box p$ per ogni p, il che si falsifica facilmente nelle algebre di Boole topologiche.

2. C'e' una interessante parentela (Gödel) tra il calcolo intuizionistico ed $S4$; si tratta in effetti di una traduzione fedele del calcolo intuizionistico "aggiungendo adeguati operatori $\Box$". Dai termini del linguaggio intuizionista a quelli di $S4$ si definisce la traduzione G per induzione come segue:

(1) $G(x) = \Box x$, se x e' una variabile;
(2) $G(p \vee q) = G(p) \vee G(q)$;
(3) $G(p \wedge q) = G(p) \wedge G(q)$;
(4) $G(p \to q) = \Box(\neg(G(p)) \vee G(q))$;
(5) $G(\bot) = \bot$;
(6) $G(\neg p) = \Box(\neg G(p))$.

Si ottiene allora il teorema:

$$\Gamma \vdash_I p \qquad \text{se e solo se} \qquad G(\Gamma) \vdash_{S4} G(p).$$

3.Un legame diretto tra algebre di Heyting ed algebre di Boole topologiche e' infine fornito da un teorema di Tarski-McKinsey. Se (A, I) e' un' algebra di Boole topologica, poniamo $O(A) := \{a \in A | a = I(a)\}$; e' presto visto che $O(A)$ diventa un algebra di Heyting con gli operatori $\wedge, \vee, \bot$ che sono quelli di A mentre implicazione e negazione si realizzano come segue per $a, b \in O(A)$:

$$a \Rightarrow b := I(a \to b) :$$
$$\sim a := I(\neg a),$$

cosi' ottenendo l' *algebra degli aperti di* (A, I). Si ha il teorema:

Per ogni algebra di Heyting H esiste un' algebra di Boole topologica (A, I) tale che H sia isomorfa ad $O(A)$.

4. **Logica lineare** LL.

La segnatura comprende:
– operatori binari: $\&, \oplus, \otimes, \parr, \multimap$;
–operatori unari: $(\ )^{\perp}, !, ?$;
–costanti $\mathbf{T}, 0, 1, \bot$.

Una presentazione (calcolo dei sequenti) di LL si puo' trovare nell' articolo di J-Y.Girard, *Linear logic,* Theoretical Computer Science 50, 1986. Si puo' anche presentarla alla Hilbert (Avron) etc. Diamo qui il calcolo dei sequenti (a due lati):

LOGICAL AXIOMS

$$A \vdash A$$

CUT RULE

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad A, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

EXCHANGE RULES

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \vdash \Delta_1, B, A, \Delta_2} \qquad \frac{\Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \vdash \Delta}{\Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \vdash \Delta}$$

NEGATION RULES

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, A^{\perp}} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{A^{\perp}, \Gamma \vdash \Delta}$$

ADDITIVE RULES

$$\Gamma \vdash \Delta, T \qquad 0, \Gamma \vdash \Delta$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \qquad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \mathbin{\&} B} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{A \mathbin{\&} B, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{B, \Gamma \vdash \Delta}{A \mathbin{\&} B, \Gamma, \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \oplus B} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \oplus B, \Gamma \vdash \Delta}$$

MULTIPLICATIVE RULES

$$\vdash 1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{1, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \perp \vdash \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \perp}$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad \Gamma_2 \vdash \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2, A \otimes B} \qquad \frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \otimes B, \Gamma \vdash \Delta}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \parr B} \qquad \frac{A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1 \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \parr B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \multimap B} \qquad \frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1, A \qquad B, \Gamma_2 \vdash \Delta_2}{A \multimap B, \Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \Delta_1, \Delta_2}$$

EXPONENTIAL RULES

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{!A, !A, \Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{!A, \Gamma \vdash \Delta} \qquad \frac{!\Gamma \vdash ?\Delta, A}{!\Gamma \vdash ?\Delta, !A}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, ?A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, ?A, ?A}{\Gamma \vdash \Delta, ?A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma \vdash \Delta, ?A} \qquad \frac{A, !\Gamma \vdash ?\Delta}{?A, !\Gamma \vdash ?\Delta}$$

Qualcuno chiama Girales le algebre della semantica algebrica equivalente per LL. Si tratta di una varieta' $\mathbb{G}$ ottenuta come segue. Per economia, e' sufficiente restringersi alla segnatura:

$$\oplus, \multimap, \mathbf{T}, \perp, !$$

Gli altri operatori si introducono per definizione:
$a^\perp := a \multimap \perp$; $a \otimes b := (a \multimap b^\perp)^\perp$; $\mathbf{1} := \perp^\perp$; $a \,\&\, b := (a^\perp \oplus b^\perp)^\perp$;
$a \parr b := (a^\perp \otimes b^\perp)^\perp$; $\mathbf{0} := \mathbf{T}^\perp$; $?a := (!(a^\perp))^\perp$.
Gli assiomi (equazionali) sono:

(1) $\oplus$ e' un' operazione di semi-reticolo superiore con massimo $\mathbf{T}$; con $\leq$ si denota il corrispondente ordine parziale;
(2) $a^{\perp\perp} = a$;
(3) $a \multimap b = b^\perp \multimap a^\perp$;
(4) $a \multimap (b \multimap c) = b \multimap (a \multimap c)$;
(5) $(a \oplus b) \multimap c \leq a \multimap c$;
(6) $a \otimes (a \multimap b) \leq b$;
(7) $a \leq b \multimap (\perp \oplus (a \otimes b))$.
(8) $!a \otimes !b = !(a \,\&\, b)$;
(9) $!!a = !a$;
(10) $!\mathbf{1} = \mathbf{1}$:
(11) $!a \leq a$.

Ne discende una buona serie di proprieta' per i Girales; abbiamo un reticolo limitato (non distributivo, in generale) $< G, \oplus, \&, \mathbf{0}, \mathbf{T} >$ che, quale monoide per $\otimes$, e' residuato; abbiamo l' involuzione $(\ )^\perp$; e le "modalita' " $!, ?$, si da' una buona teoria degli $\mathbf{1}-$*ideali*, una decente descrizione delle algebre s.d.i., etc. In effetti c'e' ANCORA MOLTO DA INDAGARE sui Girales... .

Qui a noi interessa, via il metodo di Lindenbaum-Tarski, che si ottiene un teorema diretto ed inverso di completezza algebrica per LL.

L' equazione definitoria (ved. sezione seguente) e':

$$p \,\&\, \mathbf{1} \approx \mathbf{1};$$

e le formule di equivalenza sono:

$$p \multimap q, q \multimap p.$$

4. Algebrizzazione in generale

Come si e' convenuto, un linguaggio proposizionale e' la stessa cosa che una segnatura di tipo algebrico. Fm e' l' algebra delle formule (termini). Una sostituzione σ e' un endomorfismo dell' algebra Fm.

Una *logica* L e' data su Fm mediante una *relazione* $\vdash_L$ *di conseguenza. invariante per sostituzioni,* cioe' $\vdash_L \subseteq \wp(Fm) \times Fm$ tale che:

(1) $\{p\} \vdash_L p$, (scriviamo: $p \vdash p$) per ogni $p \in Fm$;
(2) $\Gamma \vdash_L p$ implica $\Lambda \vdash p$ se $\Gamma \subseteq \Lambda$;
(3) $\Gamma \vdash_L p$ implica $\Lambda \vdash_L p$, se $\Lambda \vdash_L q$ per ogni $q \in \Gamma$;
(4) $\Gamma \vdash_L p$ implica $\sigma(\Gamma) \vdash_L \sigma(p)$, per ogni sostituzione σ.

La logica si dice *finitaria* se $\Gamma \vdash_L p$ implica $F \vdash_L p$ per qualche sottinsieme finito F di Γ.

Dato un insieme $E(x) \subseteq Fm \times Fm$ di equazioni,si determina una "traduzione"τ da termini ad insieme di equazioni:

$$\tau(p) = E(p);$$

$$\tau(\Gamma) = \bigcup\{\tau(p) | p \in \Gamma\}.$$

Una classe K di algebre e' una *semantica algebrica per* la logica L(Blok-Pigozzi-Font-...) se esiste un insieme di equazioni in una variabile $E(x) \subseteq Fm \times Fm$(dette: *equazioni definitorie*) tale che:

$$\Gamma \vdash_L p \qquad \text{se e solo se} \quad \tau(\Gamma) \models_K \tau(p).$$

• Non ogni logica possiede una semantica algebrica. Possedere una semantica algebrica con equazioni definitorie $\{\delta_i \approx \epsilon_i | i \in I\}$ comporta che:

$$p, \delta_i(p) \vdash_L \epsilon_i(p)$$

per ogni formula p. Se ne ricava facilmente un controesempio (pag. 18 di B-P).

Per catturare l' essenza della procedura di Lindenbaum-Tarski, si consideri un insieme $\Delta(x, y)$ di formule in due variabili; esso pure determina una "traduzione" ρ da equazioni a insiemi di formule:

$$\rho(p \approx q) = \Delta(p, q);$$

e, se $\Theta \subseteq Fm \times Fm$;

$$\rho(\Theta) = \bigcup\{\rho(p \approx q) | p \approx q \in \Theta\}.$$

Allora

Una logica $\vdash_L$ e' *algebrizzabile* se esiste una classe di algebre K ed esistono insiemi di equazioni $E(x)$, e di formule con due variabili $\Delta(x, y)$, che determinano traduzioni τ, ρ tali che:

(1) $\Gamma \vdash_L p$ se e solo se $\tau(\Gamma) \models_K \tau(p)$
(2) $\Theta \models_K p \approx q$ se e solo se $\rho(\Theta) \vdash_L \rho(p \approx q)$;
(3) $p \dashv\vdash_L \rho(\tau(p))$;
(4) $p \approx q =\!\mid\models_K \tau(\rho(p \approx q))$.

In tal caso K dicesi una *semantica algebrica equivalente per* L; e Δ si chiama un *insieme di formule di equivalenza* per L.

Esercizio.

Dimostrare che in effetti la definizione e' ridondante: le clausole (1)e (4) equivalgono alle clausole (3) e (4).

Casi speciali possono essere:

–'algebrizzabilita finita': se le due traduzioni sono finite;

–'algebrizzabilita B-P' : se la logica e' finitaria e le traduzioni sono finite;

–'algebrizzabilita forte' : se la massima semantica algebrica equivalente (che esiste sempre) é una varieta'.

Per esempio, si dimostra che nel caso "B-P", la massima semantica algebrica e' data dalla quasivarieta' generata da K (e questa e' allora l' unica quasivarieta' equivalente a L.

Citamo qualche risultato generale:

• Teorema di caratterizzazione sintattica :

Una logica $\vdash_L$ e' algebrizzabile se e solo se esistono $\Delta(x, y) \subseteq Fm \times Fm$ e $E(x) \subseteq Fm$ tali che:

(1) $\vdash_L \Delta(p, p)$
(2) $\Delta(p, q), \Delta(p, r) \vdash_L \Delta(p, r)$;
(3) Per ogni operatore n-ario f della segnatura:

$$\Delta(p_1, q_1), \ldots, \Delta(p_n, q_n) \vdash \Delta(f(p_1, \ldots, p_n), f(q_1, \ldots, q_n));$$

(4) $\Delta(E(p)) \dashv\vdash_L p$.

• Nel caso di forte algebrizzabilita' B-P (come negli esempi menzionati sopra, esclusa la BCK) si ha una notevole serie di corrispondenze tra proprieta' della logica L e della sua (unica) semantica equivalente K:

(1) L finitamente assiomatizzabile se e solo se K e' finitamente presentabile;
(2) L e' decidibile se e solo se K ha una teoria equazionale decidibile;
(3) L soddisfa il teorema di interpolazione se e solo se K ha la proprieta' di amalgamazione;
(4) L soddisfa il teorema di deduzione-separazione se e solo se K ha congruenze principali equazionalmente definibili.

Circa il risultato (4): il "teorema di deduzione-separazione" (Deduction-Detachment Theorem) per L significa che esiste un insieme (finito) di formule in due variabili $\Psi(x, y)$ tale che:

$$\Gamma, p \vdash_L q \qquad \text{se e solo se} \quad \Gamma \vdash \Psi(p, q).$$

K (che qui e' una varieta') ha *congruenze principali equazionalmente definibili (EDPC)* se esiste un sistema finito di equazioni in (al piu') 4 variabili $S(x, y, z, u)$ tali che per ogni $A \in K$, ed $a, b, c, d \in A$, si abbia:

$$(a, b) \in \Theta(c, d) \qquad \text{se e solo se} \quad A \models S(a, b, c, d).$$

EDPC e' una condizione molto potente per una varieta': per esempio essa implica:

–distributivita' delle congruenze;

–la proprieta' di estensione delle congruenze (CEP): ogni congruenza di una sottalgebra e' la restrizione di una congruenza dell' algebra.

–un ultraprodotto di algebre sdi e' ancora sdi.

• Citiamo una seconda caratterizzazione intrinseca (in termini dell' *operatore di Leibniz*) delle logiche algebrizzabili.

Una *matrice* e' una coppia (A, F) in cui A é un' algebra ed $F \subseteq A$. (Idea: F rapprenta l'insieme dei valori "vero" della matrice).

La matrice (A, F) e' un *modello* della logica L se $\Gamma \vdash_L p$ comporta che, per ogni interpretazione v (omomorfismo da Fm verso A), se $v(q) \in F$ per $q \in \Gamma$, allora anche $v(p) \in F$. In tal caso F dicesi un *filtro in A per L*.

La *congruenza di Leibniz di* (A, F) é definita da:

$$\Omega_A(F) = max\{\theta \in Con(A) | \forall a, b((a \in F, a\theta b) \Rightarrow b \in F)\}.$$

(Si noti che non ha a che vedere con alcuna logica).

Esercizio. (1) Dimostrare che $\Omega_A(F)$ esiste sempre. (2) Dimostrare che: $(a, b) \in \Omega_A(F)$ se e solo se per ogni $p(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) \in Fm$, per ogni $c_0, \ldots, c_n \in A$, si ha:

$$p^A(a, c_0, \ldots, c_n) \in F \quad \text{se e solo se} \quad p^A(b, c_0, \ldots, c_n) \in F.$$

(Questo giustifica il nome: una specie di "identificazione degli indiscernibili"). La logica

L dicesi *equivalenziale ("equivalential")* se sui propri modelli la congruenza di Leibniz e' equazionalmente definibile: esiste un insieme di formule i n due variabili $E(x, y)$ tale che per ogni modello (A, F) di L si abbia

$$(a, b) \in \Omega_A(F) \quad \text{se e solo se} \quad E^A(a, b) \subseteq F.$$

Allora

Teorema di caratterizzazione intrinseca

La logica L é algebrizzabile se e solo se L é equivalenziale e per ogni algebra A l' operatore di Leibniz Ω_A ristretto ai filtri in A per L é iniettivo.

Segnaliamo anche alcuni esempi di logiche non algebrizzabili (per es. sezione 5.2 di B-P). Per approfondimenti, si puo' cominciare dalle referenze date nel sommario.