Introduzione alla Semantica dei Linguaggi Naturali

Versione preliminare

Anna Bucalo
Silvio Ghilardi

29 settembre 2006

Avvertenza. I presenti appunti hanno carattere preliminare, si ringraziano anticipatamente quanti vorranno far pervenire osservazioni e proposte di miglioramento.

Presentazione

La nostra competenza nell'uso della lingua italiana si articola in varie componenti. Schematizzando ne possiamo individuare almeno tre:

– una componente *sintattica*, relativa alla nostra capacità di formulare frasi grammaticalmente corrette;

– una componente *semantica*, relativa alla nostra capacità di dare un significato agli enunciati, per connetterli al mondo che ci circonda in modo più o meno diretto;

– una componente *pragmatica*, relativa alla nostra capacità di utilizzare la lingua in modo appropriato nei vari contesti, ad esempio durante una conversazione, per ottenere gli scopi che ci proponiamo.

A sua volta ciascuna di queste competenze comprende molteplici sottocompetenze. Ad esempio, nella componente sintattica si possono distinguere due aspetti connessi tra loro e riguardanti, rispettivamente, la *struttura logica* degli enunciati (presenza di un soggetto, di un verbo, *ecc.*) e la *morfologia* della lingua italiana in senso stretto (concordanze, coniugazione dei verbi, *ecc.*).

Nel presente corso non tratteremo tutte queste competenze linguistiche ma faremo una scelta drastica: la componente pragmatica sarà trattata occasionalmente; in modo analogo verranno trascurati, almeno in una certa misura, gli aspetti sintattici relativi alla morfologia. Si studierà prevalentemente il problema *semantico* che verrà trattato secondo un'ottica *composizionale* nel senso che il significato globale di una proposizione sarà costruito a partire da quello dei suoi costituenti. L'analisi semantica che faremo darà anche, come sottoprodotto, un metodo di *traduzione* delle frasi di un frammento (il più possibile ampio) della lingua italiana in un *linguaggio formale* che possa agevolmente prestarsi a compiere *deduzioni e inferenze*. Tale procedimento potrà quindi rappresentare un nucleo significativo di processamento automatico dell'informazione contenuta nei testi scritti in linguaggio naturale.

In questa sede non affronteremo nei dettagli problemi fondazionali e difficoltà tecniche proprie di linguaggi più complessi; inoltre, trattandosi di un corso di primo livello, trascureremo gli aspetti intensionali. Utilizzeremo una notazione *topos teoretica* al posto di quella classica della *Montague grammar*, per sottolineare il fatto che i contenuti qui esposti possono essere inseriti, in modo formale, nel contesto della teoria dei topoi.

I presenti appunti si articolano in due parti: nella prima si introducono le nozioni preliminari relative alle costruzioni insiemistiche e alle grammatiche formali, nella seconda si presenta il materiale per un'analisi *estensionale* del significato.

Si consiglia lo studente di consultare attentamente il programma d'esame che sarà diffuso alla fine del corso e che comprende anche una parte di logica elementare ed una parte più prettamente filosofica che non sono coperte dalle presenti note. Per quanto riguarda i contenuti di logica verranno utilizzate le dispense **Corso Propedeutico di Logica**, disponibili su web all'indirizzo
http://webcen.usr.dsi.unimi.it/2002-03/digitale/filosofia_ling.

Questi appunti sono destinati ad uso didattico per un corso semestrale di primo livello rivolto a studenti di estrazione informatica. Per tale motivo verranno privilegiate chiarezza e semplicità di esposizione, spesso anche a costo di introdurre soluzioni che al lettore esperto potranno sembrare (e sono in realtà) alquanto semplificatorie.

Indice

Nozioni preliminari

1 Insiemi

In questo capitolo introduciamo nozioni e proprietà relative agli insiemi che verranno utilizzate estensivamente nel corso. Gli argomenti qui trattati, generalmente classificati sotto il nome di *teoria ingenua degli insiemi,* sono esposti in modo sintetico e limitandosi ai concetti che verranno utilizzati nel seguito. Una presentazione assiomatica della teoria degli insiemi esula dagli scopi del presente corso, si rinvia pertanto il lettore interessato ai testi specifici.

1.1 Insiemi e operazioni su di essi

Questo primo paragrafo è dedicato all'esposizione dei concetti fondamentali sugli insiemi, alla definizione delle operazioni su di essi e alla descrizione formale delle loro proprietà.

Insiemi e sottoinsiemi

Assumiamo come primitivi i concetti di *insieme* e di *elemento*, nel senso che non ne diamo una definizione in termini di nozioni più elementari; i due concetti formalizzano l'idea intuitiva di collezione (insieme) di oggetti (elementi). Un insieme è determinato dai suoi elementi, ciò significa che *due insiemi sono uguali* se hanno gli stessi elementi.

Esempi di insiemi sono l'insieme degli esseri viventi, l'insieme dei numeri naturali, l'insieme delle lettere a,b,c dell'alfabeto italiano. I loro elementi sono, rispettivamente, tutti gli esseri viventi, tutti i numeri naturali, le lettere a,b,c. Esiste un *unico* insieme privo di elementi, detto *insieme vuoto.*

Un insieme X è un *sottoinsieme* dell'insieme Y se ogni elemento di X è un elemento di Y.

Adotteremo le seguenti *notazioni* standard:

$x \in X$ significa: *x appartiene ad X*, cioè x è un elemento dell'insieme X

$\{x, y, z\}$ denota l'insieme i cui elementi sono x, y, z

$\{x \in X | \dots\}$ denota l'insieme i cui elementi sono gli elementi x di X tali che ...[1]

$X \subseteq Y$ significa: X è un sottoinsieme di Y

$\emptyset$ denota l'insieme vuoto

$\{*\}$ oppure **1** rappresentano un generico insieme con un unico elemento

$\mathcal{P}(X)$ denota l'insieme dei sottoinsiemi di X, detto *insieme delle parti di X*.

Esercizio 1.1 Dimostrare che l'inclusione tra insiemi è transitiva cioè che se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$ allora $X \subseteq Z$.

Esercizio 1.2 Dimostrare che $X = Y$ se e solo se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

[1] Nel seguito utilizzeremo anche una notazione analoga a questa con un significato diverso (*cfr.* par. **??**.)

Unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano di insiemi

Siano A e B due insiemi.

L'*unione di* X e Y, $X \cup Y$, è l'insieme degli elementi che appartengono ad X oppure a Y.

L'*intersezione di* X e Y, $X \cap Y$, è l'insieme degli elementi che appartengono sia ad X che a Y.

La *differenza* $X \smallsetminus Y$ è l'insieme degli elementi che appartengono ad X e non appartengono a Y.

Due insiemi la cui intersezione è l'insieme vuoto si dicono *disgiunti.*

Dati n insiemi $X_1, \dots, X_n$, il loro *prodotto cartesiano* $X_1 \times \cdots \times X_n$, è l'insieme delle *$n$-ple ordinate* $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ con $x_i \in X_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. Due elementi $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ e $\langle y_1, \dots, y_n \rangle$ di $X_1 \times \cdots \times X_n$ sono uguali se $x_i = y_i$, per ogni $i = 1, \dots, n$.

Se ad esempio X è l'insieme dei numeri naturali e Y è l'insieme dei numeri naturali primi allora $X \cup Y$ è l'insieme dei numeri naturali, cioè $X \cup Y = X$.

Se X è l'insieme dei multipli di 3 e Y è l'insieme dei multipli di 4 allora $X \cap Y$ è l'insieme dei numeri multipli di 12.

Se $X = \{a, b, c\}$ e $Y = \{c, d\}$ allora $X \smallsetminus Y = \{a, b\}$.

Se infine X è l'insieme dei numeri naturali pari e Y è l'insieme dei numeri dispari allora $X \times Y = \{\langle m, n \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid m \in X, n \in X\}$ cioè l'insieme delle coppie ordinate costituite da un numero pari e un numero dispari.

Proprietà delle operazioni su insiemi

Le operazioni di unione e intersezione tra insiemi sono associative e commutative, inoltre ciascuna di esse è distributiva rispetto all'altra:

Proposizione 1.1 *Siano X, Y, Z insiemi; valgono le seguenti proprietà:*

associatività $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$, $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

commutatività $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$

distributività $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

idempotenza $X \cup X = X$, $X \cap X = X$

assorbimento $X \cup (X \cap Y) = X$, $X \cap (X \cup Y) = X$

Esercizio 1.3 Dimostrare le proprietà della Proposizione **??**.

1.2 Relazioni e funzioni

Una *relazione binaria tra due insiemi* X e Y è un sottoinsieme R del prodotto cartesiano $X \times Y$; se X coincide con Y si dice che R è una relazione binaria *su* X.

Per esempio l'insieme di tutte le coppie di esseri umani costituite da due fratelli è una relazione binaria sull'insieme degli esseri umani. L'insieme delle coppie di numeri naturali $\langle m, n \rangle$ tali che $m < n$ è una relazione binaria sull'insieme dei numeri naturali e precisamente l'usuale relazione di minore stretto.

Una relazione binaria tra X e Y è, quindi, descritta formalmente assegnando un insieme $R \subseteq X \times Y$; utilizzeremo indifferentemente le notazioni xRy, $R(x, y)$, $\langle x, y \rangle \in R$ per denotare gli elementi $\langle x, y \rangle$ di $X \times Y$ che appartengono ad R.

Una relazione binaria R tra due insiemi X e Y è una *funzione* (*totale*) se per ogni elemento $x \in X$ esiste uno e un solo elemento $y \in Y$ tale che $\langle x, y \rangle \in R$. Per esempio $\{\langle m, n \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n = m^2\}$ è una funzione su $\mathbb{Z}$ mentre $\{\langle m, n \rangle \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m = n^2\}$ è una relazione ma non una funzione.

Adotteremo la notazione standard per rappresentare una funzione tra due insiemi:

$$f : X \to Y$$

significa che f è una funzione dalll'insieme X all'insieme Y e $f(x)$ indica il valore di f sull'argomento $x \in X$. Ricordiamo, inoltre, che X si dice *dominio* di f e Y si dice *rango* oppure *codominio* di f.

Dalla definizione segue che *due funzioni* $f, g : X \to Y$ *sono uguali* se per ogni $x \in X$ si ha $f(x) = g(x)$.

Una funzione $f : X \to Y$ si dice *iniettiva* se, per ogni $x, x' \in X$, da $f(x) = f(x')$ segue $x = x'$, si dice *suriettiva* se, per ogni $y \in Y$, esiste $x \in X$ tale che $f(x) = y$, si dice *biiettiva* (o *corrispondenza biunivoca* o *isomorfismo* o *biiezione*) se è iniettiva e suriettiva. Useremo la notazione $X \simeq Y$ per indicare il fatto che esiste un isomorfismo tra i due insiemi X e Y.

Per esempio la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $f(x) = 1$ (funzione costante) non è iniettiva né suriettiva, la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definita da $g(x) = x^2$ è iniettiva ma non suriettiva, la funzione $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da $i(x) = |x|$ (valore assoluto) è suriettiva ma non iniettiva, infine, per ogni insieme X, $1_X : X \to X$ definita da $1_X(x) = x$ (funzione identità su X) è biiettiva.

Date due funzioni f, g tali che il codominio di f coincide con il dominio di g:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

la *funzione composta* $g \circ f$ è la funzione

$$X \xrightarrow{g \circ f} Z$$

definita da

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ossia il valore di $g \circ f$ sull'argomento x si ottiene calcolando g sull'argomento $f(x)$. Si noti che il dominio e il codominio di $g \circ f$ sono rispettivamente il dominio di f e il codominio di g.

La composizione di funzioni è *associativa* nel senso che date tre funzioni

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$

si ha

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Ricordiamo che una funzione $f : X \to Y$ è biiettiva se e solo se esiste una funzione $g : Y \to X$, detta *inversa di* f, tale che $g \circ f = 1_X$ e $f \circ g = 1_Y$ (e che l'inversa, se esiste, è unica).

La precedente nozione di relazione binaria su un insieme può essere generalizzata al caso di un numero $n \in \mathbb{N}$ arbitrario di insiemi.

Una relazione n-aria su un insieme X è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times \cdots \times X$ (n copie di X). Una relazione R n-aria su un insieme X tale che per ogni $\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle \in X \times \cdots \times X$ ($n-1$ copie di X) esiste uno e un solo $x \in X$ tale che $\langle x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\rangle \in R$ è una funzione, useremo in questo caso la notazione $f(\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle) = x_n$ (si noti che per $n = 2$ la definizione coincide con quella di funzione tra due insiemi, data in precedenza).

Dalla definizione segue che una relazione unaria su un insieme X è semplicemente un sottoinsieme di X; per esempio si consideri la seguente relazione sull'insieme dei numeri naturali $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è pari}\} \subseteq \mathbb{N}$, allora $P(x)$ (oppure $x \in P$) significa "x è un numero pari". In particolare una relazione unaria è una funzione se ha un solo elemento.

Dato l'insieme $X = \{a, b\}$, $R = \{\langle a, a, a\rangle, \langle a, a, b\rangle, \langle b, a, a\rangle\}$ è una relazione ternaria su X ma non è una funzione.

Esercizio 1.4 Dimostrare che, per ogni insieme X, si ha

$$X \times \mathbf{1} \simeq X \simeq \mathbf{1} \times X.$$

Esercizio 1.5 Dimostrare che, dati insiemi $X_1, \ldots, X_n$ e una biiezione

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\},$$

si ha

$$X_1 \times \cdots \times X_n \simeq X_{\sigma(1)} \times \cdots \times X_{\sigma(n)}.$$

Funzione caratteristica di un insieme

Le funzioni possono essere utilizzate per rappresentare insiemi; precisamente un sottoinsieme S di un insieme X può essere descritto mediante un'opportuna funzione detta *funzione caratteristica di* S.

Consideriamo l'insieme $\Omega = \{0, 1\}$, in cui l'elemento 0 rappresenta il valore di verità *falso* e 1 rappresenta il valore di verità *vero*.

Se S è un sottoinsieme di X, la funzione caratteristica di S è la funzione

$$\chi_S : X \to \Omega$$

definita da:

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Osserviamo che il sottoinsieme S è completamente determinato dalla sua funzione caratteristica, infatti $S = \{x \in X \mid \chi_S(x) = 1\}$.

Esiste quindi una corrispondenza biunivoca naturale Φ tra sottoinsiemi di X e funzioni $X \to \Omega$; la corrispondenza associa ad ogni sottoinsieme di X la sua funzione caratteristica: per ogni $S \subseteq X$

$$\Phi(S) = \chi_S$$

È immediato verificare che la funzione Φ è iniettiva e suriettiva, infatti per ogni funzione $f : X \to \Omega$, l'insieme $\{x \in X \mid f(x) = 1\}$ è l'unico sottoinsieme S di X tale che $\Phi(S) = f$.

Funzioni proiezioni del prodotto cartesiano

Dato il prodotto cartesiano $X_1 \times \cdots \times X_n$, per ogni $i = 1, \ldots, n$ la funzione

$$\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i$$

definita da $\pi_i(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle) = x_i$ si dice proiezione (i-esima).

Le proiezioni permettono di stabilire un'importante proprietà del prodotto cartesiano di insiemi.

Data $f : Z \to X_1 \times \cdots \times X_n$, per ogni $z \in Z$ si ha

$$f(z) \in X_1 \times \cdots \times X_n$$

quindi $f(z) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, con $x_i \in X_i$. Gli elementi x_i si ottengono componendo f con le proiezioni: $x_i = (\pi_i \circ f)(z)$; per ogni $i = 1, \ldots, n$, chiamiamo f_i la composizione

$$Z \xrightarrow{f} X_1 \times \cdots \times X_n \xrightarrow{\pi_i} X_i$$

quindi

$$f(z) = \langle f_1(z), \ldots, f_n(z) \rangle.$$

Si può verificare che la corrispondenza cosí stabilita tra funzioni

$$f : Z \to X_1 \times \cdots \times X_n$$

e n-ple $\langle f_1, \ldots, \ldots f_n \rangle$ dove $f_i : Z \to X_i$ è un isomorfismo; per questo motivo denoteremo una generica funzione $f : Z \to X_1 \times \cdots \times X_n$ con $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, dove $f_i : Z \to X_i$.

Prodotto di funzioni

Introduciamo infine la seguente notazione: se $f_1 : X_1 \to Y_1$ e $f_2 : X_2 \to Y_2$ allora

$$f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$

è la funzione $\langle f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2 \rangle$, quindi $(f_1 \times f_2)(\langle x_1, x_2 \rangle) = \langle f_1(x_1), f_2(x_2) \rangle$.

1.3 Esponenziali

Dati due insiemi X e Y è possibile costruire l'insieme X^Y delle funzioni da Y a X. Vedremo ora che, se X, Y, Z sono insiemi arbitrari, esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle funzioni

$$\varphi : Y \times Z \to X$$

e l'insieme delle funzioni

$$\psi : Z \to X^Y.$$

Questo isomorfismo e le corrispondenze che lo realizzano saranno utilizzati ripetutamente durante il corso.

Nel seguito, adottando la convenzione standard, utilizzeremo la seguente notazione per funzioni di più variabili: $f(x_1, \ldots, x_n)$ indica l'applicazione della funzione f all'argomento $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

Osserviamo innanzitutto che, data una funzione

$$\varphi : Y \times Z \to X,$$

per ogni valore fissato $z \in Z$ del secondo argomento di φ si ottiene una funzione $\varphi_z : Y \to X$, definita da $\varphi_z(y) = \varphi(y, z)$. Al variare di $z \in Z$ si ottiene cosí una funzione

$$(\lambda y)\varphi : Z \to X^Y$$

definita da

$$(\lambda y)\varphi(z) = \varphi_z : Y \to X$$

e quindi

$$(\lambda y)\varphi(z)(y) = \varphi(y, z).$$

La corrispondenza che associa a φ la funzione $(\lambda y)\varphi$ si dice *λ-astrazione di φ (rispetto alla variabile y)*.

Prima di procedere con altre definizioni è utile vedere un esempio. Sia φ la funzione che calcola il prodotto di due numeri naturali, quindi

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

sia definita da $\varphi(x, y) = x \cdot y$; allora la funzione $(\lambda x)\varphi$ associa al numero $5 \in \mathbb{N}$ la "tabellina del 5", ossia la funzione che

calcolata su $x = 1$ dà $1 \cdot 5 = 5$

calcolata su $x = 2$ dà $2 \cdot 5 = 10$

calcolata su $x = 3$ dà $3 \cdot 5 = 15$ *ecc.*

Quindi $(\lambda x)\varphi(y)$ è la funzione "tabellina di y".

Consideriamo ora la funzione

$$\mathrm{val} : Y \times X^Y \to X$$

definita da $\mathrm{val}(y, f) = f(y)$, la cui azione sulla coppia $\langle y, f\rangle$ consiste nel valutare la funzione $f \in X^Y$ sull'argomento $y \in Y$.

Data una funzione
$$h : Z \to X^Y$$
sia $\overline{h}$ la composizione
$$Y \times Z \xrightarrow{1_Y \times h} Y \times X^Y \xrightarrow{\mathrm{val}} X$$
quindi $\overline{h}(y, z) = \mathrm{val}(y, h(z)) = h(z)(y)$

Le due corrispondenze che associano a $\varphi : Y \times Z \to X$ la funzione $(\lambda y)\varphi$ e ad $h : Z \to X^Y$ la funzione $\overline{h}$ realizzano l'isomorfismo tra l'insieme delle funzioni $Y \times Z \to X$ e l'insieme delle funzioni $Z \to X^Y$, infatti si ha:

1. $(\lambda y)(\mathrm{val} \circ (1_Y \times h)) = h$, per ogni $h : Z \to X^Y$
2. $\mathrm{val} \circ (1_Y \times (\lambda y)\varphi) = \varphi$, per ogni $\varphi : Y \times Z \to X$.

Anche allo scopo di familiarizzarci con le notazioni, verifichiamo che valgono le due uguaglianze 1. e 2.

Per ogni $y \in Y$ e ogni $z \in Z$ si ha, per definizione,
$$(\lambda y)(\mathrm{val} \circ (1_Y \times h))(z)(y) = \mathrm{val}(y, h(z)) = h(z)(y)$$
quindi le due funzioni $(\lambda y)(\mathrm{val} \circ (1_Y \times h))(z)$ e $h(z)$ coincidono e quindi vale la 1.

Per quanto riguarda la 2. osserviamo che per ogni $y \in Y, z \in Z$ si ha
$$(\mathrm{val} \circ (1_Y \times (\lambda y)\varphi))(y, z) = \mathrm{val}(y, (\lambda y)\varphi(z)) = \varphi(y, z)$$
e quindi anche 2. è valida.

In virtù dell'isomorfismo descritto nell'esercizio **??** è possibile applicare la λ-astrazione a variabili diverse dalla prima. Con un leggero abuso di notazione, denoteremo allo stesso modo la λ-astrazione rispetto a una qualsiasi variabile (trascurando cosí la composizione con l'isomorfismo che scambia l'ordine dei fattori nel dominio della funzione in esame).

Nel seguito, oltre alla notazione insiemistica utilizzata finora, adotteremo per le funzioni anche la seguente convenzione: scriveremo una funzione come un "termine" con un numero di variabili pari al numero dei suoi argomenti; cosí per esempio $\varphi : Y \times Z \to X$ sarà scritta $\varphi(y, z)$ e quindi $(\lambda y)\varphi$ diventerà $(\lambda y)\varphi(y, z)$. Inoltre, poiché utilizzeremo la λ-astrazione solo su funzioni di codominio Ω, conveniamo di scrivere
$$\{\lambda y | \varphi(y, z)\}$$
anziché $(\lambda y)\varphi(y, z)$. In effetti Ω^Y è l'insieme (delle funzioni caratteristiche) dei sottoinsiemi di Y, per cui la notazione $\{\lambda y | \varphi(y, z)\}$ suggerisce il fatto che, per ogni $z \in Z$, stiamo considerando "l'insieme degli $y \in Y$ per i quali vale $\varphi(y, z)$"; più precisamente, $\{\lambda y | \varphi(y, z)\}$ rappresenta una famiglia di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di Y che dipendono dal parametro $z \in Z$.

In questo contesto, che definiamo logico/linguistico, λ rappresenta un operatore che vincola la variabile rispetto a cui si è operata l'astrazione e la composizione di funzioni corrisponde alla sostituzione, in un termine, di una variabile con un termine. Inoltre l'uguaglianza 2. si riformula nel modo seguente

$$\{\lambda y|\varphi(y,z)\}(t) = \varphi(t/y,z) \tag{3}$$

e si può leggere cosí: "t appartiene all'insieme degli $y \in Y$ per i quali vale $\varphi(y,z)$ se e solo se vale $\varphi(t,z)$". La (3), detta λ-*conversione*, avrà un ruolo importante nel seguito.[2]

Concludiamo osservando che, data una funzione $f : X \to \Omega$, in virtù dell'isomorfismo $X \times \mathbf{1} \simeq X$ possiamo considerare la funzione

$$\tilde{f} : X \times \mathbf{1} \to \Omega$$

definita da

$$\tilde{f}(x,*) = f(x)$$

e quindi, applicando la λ-astrazione, otteniamo una funzione

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\{\lambda x|f(x)\}} \Omega^X$$

detta *nome di* f (si noti che nell'ultima riga abbiamo identificato f con $\tilde{f}$).

[2]L'uso dell'operatore λ e la terminologia λ-*conversione* sono mutuati dal λ-calcolo (*cfr.* J. Lambek, P. J. Scott, *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge University Press, 1986).

2 Grammatiche formali

In questo capitolo introduciamo alcune nozioni, relative alle *grammatiche formali*, che verranno utilizzate nel corso. Per una trattazione più completa dell'argomento si rinvia il lettore ai testi specifici.

Un *alfabeto* è un insieme Σ di simboli, una *parola su* Σ è una lista finita (eventualmente vuota) di elementi di Σ. Denoteremo con ε la parola vuota.

Nel seguito considereremo l'alfabeto costituito dalle parole della lingua italiana ed da alcuni *metasimboli* come $\mathcal{E}, \mathcal{SN}, \mathcal{SV}, \ldots$ che utilizzeremo per generare le frasi.

Un altro esempio di alfabeto è il seguente: $\Sigma = \{$gatto, ama, il, Paolo$\}$. Esempi di parole su Σ sono

(1) *Paolo ama il gatto*

(2*) *gatto gatto il Paolo*

Mentre la (1) è una frase corretta della lingua italiana, (2*) certamente non lo è (e peraltro non possiamo ragionevolmente attribuirle alcun significato). Utilizzeremo sempre "$*$" per denotare proposizioni grammaticalmente scorrette.

Dato un alfabeto Σ, denoteremo con Σ^* l'insieme delle parole su Σ; definiamo *linguaggio su* Σ un sottoinsieme di Σ^*.

Se, per esempio, Σ è l'insieme delle parole del dizionario (eventualmente modificate secondo le regole della morfologia), l'insieme delle proposizioni grammaticalmente corrette della lingua italiana è un linguaggio nel senso sopra definito.

Il modo standard per generare linguaggi consiste nel definire un'opportuna *grammatica* la cui funzione è quella di fissare le *regole* che permettono di costruire tutte e sole le parole del linguaggio.

In questo corso presenteremo una grammatica (e quindi un insieme di regole) che genera un frammento significativo della lingua italiana; vedremo inoltre, con qualche esempio, che è possibile estendere il linguaggio aggiungendo nuove regole alla grammatica data.

Le regole della nostra grammatica saranno una formalizzazione delle seguenti:

Descrizione informale delle regole

1. se si giustappone un sintagma nominale ($\mathcal{SN}$) a un sintagma verbale ($\mathcal{SV}$) si ottiene un enunciato ($\mathcal{E}$)
2. se si inframmezzano due enunciati con una congiunzione ($\mathcal{C}$) si ottiene un enunciato
3. un verbo intransitivo ($\mathcal{VI}$) è un sintagma verbale
4. se si giustappone un verbo transitivo ($\mathcal{VT}$) a un sintagma nominale si ottiene un sintagma verbale
5. se si giustappongono, nell'ordine, un verbo dativo ($\mathcal{VD}$), un sintagma nominale, la preposizione 'a' e un altro sintagma nominale si ottiene un sintagma verbale
6. un nome proprio ($\mathcal{NP}$) è un sintagma nominale
7. se si giustappone un determinante ($\mathcal{D}$) a un nome comune ($\mathcal{NC}$) si ottiene un sintagma nominale
8. 'e', 'o', 'oppure', ... sono congiunzioni
9. 'corre', 'salta', 'va', ... sono verbi intransitivi
10. 'ama', 'picchia', 'vede',... sono verbi transitivi
11. 'dà', 'mostra', ... sono verbi dativi
12. 'Luca', 'Lea', 'Isa', ... sono nomi propri
13. 'ogni', 'qualche', ... sono determinanti
14. 'italiano', 'squadra', ... sono nomi comuni
15. ......

......

Figura 1: Regole

Introduciamo ora la nozione formale di grammatica.

Definizione 2.1 Una *grammatica* $\mathcal{G}$ è una quadrupla $\langle \Sigma, M, R, \mathcal{E} \rangle$ dove

i. Σ e M sono insiemi disgiunti

ii. $\mathcal{E} \in M$

iii. R è un insieme di coppie del tipo $\alpha \to \beta$, con $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup M)^*$, $\alpha \neq \varepsilon$.

I simboli in Σ si chiamano *simboli terminali*, quelli in M *metasimboli* (oppure *simboli non terminali*), $\mathcal{E}$ si dice *simbolo iniziale*, R infine è l'insieme delle *regole*.

Dobbiamo ora dare una definizione di *derivazione* che permetta di generare le parole del linguaggio.

Data una grammatica $\mathcal{G} = \langle \Sigma, M, R, \mathcal{E} \rangle$ e date due parole $w, z \in (\Sigma \cup M)^*$ diciamo che z è *derivabile da* w *in un passo* (in simboli $w \xrightarrow[\mathcal{G}]{} z$) se e solo se, per qualche $x, y \in (\Sigma \cup M)^*$, w è del tipo $x\alpha y$, z è del tipo $x\beta y$ e $\alpha \to \beta$ è una regola di R. Diciamo che z è *derivabile da* w (in simboli $w \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} z$) se e solo se esiste una sequenza

$$u_1 \xrightarrow[\mathcal{G}]{} u_2 \xrightarrow[\mathcal{G}]{} \cdots \xrightarrow[\mathcal{G}]{} u_n$$

(con $n \geq 1$) tale che $w = u_1$ e $z = u_n$.

Il *linguaggio generato da* $\mathcal{G}$ è l'insieme delle parole $w \in \Sigma^*$ tali che

$$\mathcal{E} \xrightarrow[\mathcal{G}]{*} w$$

(si noti che $w \in \Sigma^*$ quindi non può contenere metasimboli).

Esiste una classificazione (per livelli di complessità) delle grammatiche. Una grammatica $\mathcal{G} = \langle \Sigma, M, R, \mathcal{E} \rangle$ è detta *libera dal contesto (context-free)* se e solo se ogni regola di R è del tipo

$$\alpha \to \beta$$

dove α è una parola contenente un solo simbolo che, inoltre, è un metasimbolo.

In grammatiche libere dal contesto le derivazioni assumono la forma di alberi in cui i nodi interni sono etichettati da metasimboli e le foglie da simboli terminali, vedremo tra breve un esempio di ciò.

Possiamo ora descrivere la grammatica che utilizzeremo nel seguito.

Grammatica $\mathcal{G}$

$\mathcal{G} = \langle \Sigma, M, R, \mathcal{E} \rangle$ dove

i. l'alfabeto dei simbolo terminali è

   $\Sigma = \{$e, o, corre, salta, va,..., ama, picchia, vede,..., dà, mostra,..., a, Luca, Lea, Isa,..., ogni, qualche, un, il ...$\}$

ii. l'alfabeto dei metasimboli è

   $M = \{\mathcal{E}, \mathcal{SN}, \mathcal{SV}, \mathcal{C}, \mathcal{VI}, \mathcal{VT}, \mathcal{VD}, \mathcal{NP}, \mathcal{NC}, \mathcal{D}\}$

iii. le regole sono le seguenti:

1. $\mathcal{E} \rightarrow\ \mathcal{SN}\ \ \mathcal{SV}$
2. $\mathcal{E} \rightarrow\ \mathcal{E}\ \ \mathcal{C}\ \ \mathcal{E}$
3. $\mathcal{SV} \rightarrow\ \mathcal{VI}$
4. $\mathcal{SV} \rightarrow\ \mathcal{VT}\ \ \mathcal{SN}$
5. $\mathcal{SV} \rightarrow\ \mathcal{VD}\ \ \mathcal{SN}\ \ \text{a}\ \ \mathcal{SN}$
6. $\mathcal{SN} \rightarrow\ \mathcal{NP}$
7. $\mathcal{SN} \rightarrow\ \mathcal{D}\ \ \mathcal{NC}$
8. $\mathcal{C} \rightarrow$ e | o | oppure | ...
9. $\mathcal{VI} \rightarrow$ corre | salta | va | ...
10. $\mathcal{VT} \rightarrow$ ama | picchia | vede | ...
11. $\mathcal{VD} \rightarrow$ dà | mostra | ...
12. $\mathcal{NP} \rightarrow$ Paolo | Luca | Lea | Isa | ...
13. $\mathcal{NC} \rightarrow$ italiano | squadra | ...
14. $\mathcal{D} \rightarrow$ ogni | qualche | un | il | ...

Figura 2: Grammatica $\mathcal{G}$

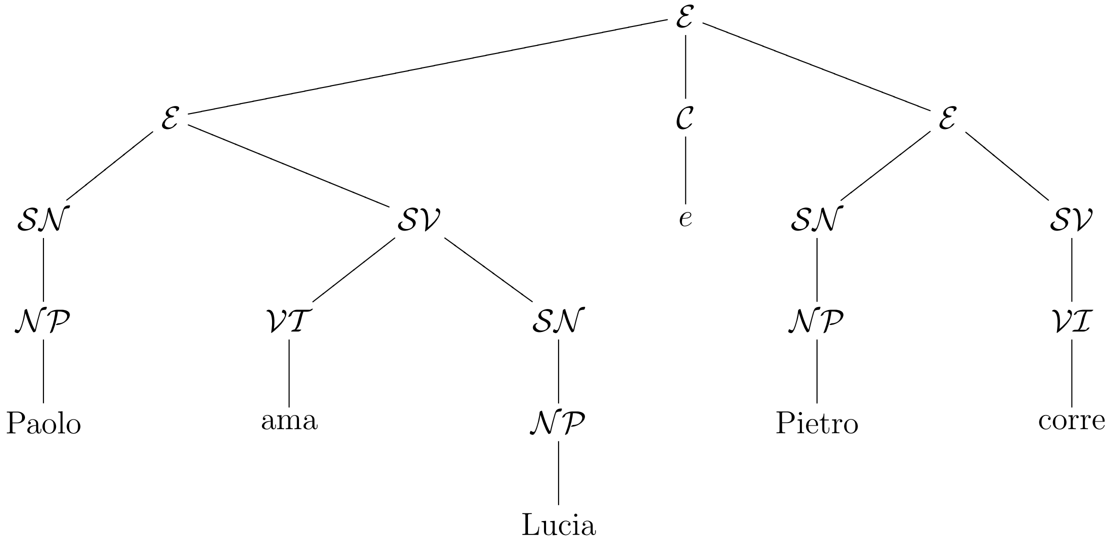
Dalla definizione segue immediatamente che $\mathcal{G}$ è una grammatica libera dal contesto. Vediamo un esempio di applicazione delle regole per generare una parola del nostro linguaggio. La frase della lingua italiana:

(3) *Paolo ama Lucia e Pietro corre*

si può supporre ottenuta nel modo seguente:

$$\mathcal{E} \to \mathcal{E}\ \mathcal{C}\ \mathcal{E} \to \mathcal{E}\ \text{e}\ \mathcal{E} \to \mathcal{SN}\ \mathcal{SV}\ \text{e}\ \mathcal{E} \to \mathcal{NP}\ \mathcal{SV}\ \text{e}\ \mathcal{E} \to$$
$$\text{Paolo}\ \mathcal{SV}\ \text{e}\ \mathcal{E} \to \text{Paolo}\ \mathcal{VT}\ \mathcal{SN}\ \text{e}\ \mathcal{E} \to \text{Paolo ama}\ \mathcal{SN}\ \text{e}\ \mathcal{E} \to$$
$$\text{Paolo ama}\ \mathcal{NP}\ \text{e}\ \mathcal{E} \to \text{Paolo ama Lucia e}\ \mathcal{E} \to$$
$$\text{Paolo ama Lucia e}\ \mathcal{SN}\ \mathcal{SV} \to \text{Paolo ama Lucia e}\ \mathcal{NP}\ \mathcal{SV} \to$$
$$\text{Paolo ama Lucia e Pietro}\ \mathcal{SV} \to \text{Paolo ama Lucia e Pietro}\ \mathcal{VI} \to$$
$$\text{Paolo ama Lucia e Pietro corre}$$

La derivazione appena descritta può essere graficamente schematizzata tramite l'albero:



La lettura delle foglie (da sinistra a destra) dà la frase terminale (3).

A questo punto sono utili alcune precisazioni.
In primo luogo, una grammatica per essere significativa non potrà completamente prescindere dalla morfologia. Ad esempio, $\mathcal{G}$ non è in grado di produrre l'enunciato

(4) *Pietro e Lucia corrono*

ma esso può essere generato da grammatiche più complesse che comprendano regole (di morfologia) per coniugare il verbo "correre" non solo alla terza persona singolare "corre" ma anche alla terza persona plurale "corrono".

Tali regole morfologiche *saranno sempre lasciate implicite nelle presenti note* per non appesantire la trattazione con elementi non rilevanti per i nostri scopi. Ignorando la morfologia, di fatto tratteremo sempre grammatiche libere dal contesto e potremo sempre rappresentare le derivazioni con alberi del tipo precedente.

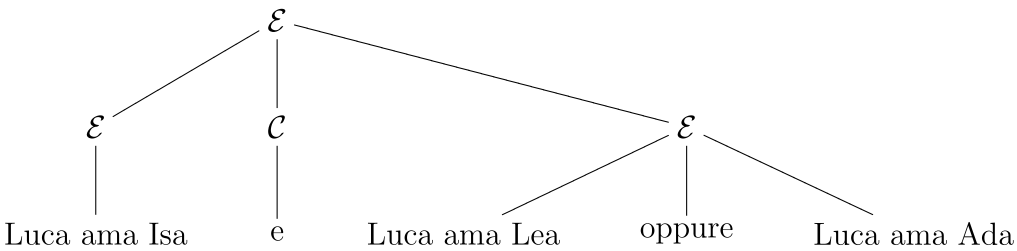
In secondo luogo, occorre *distinguere* la frase terminale prodotta dal suo albero di derivazione. Ciò è essenziale perché si possono avere casi di *ambiguità* che influiscono sul significato della frase prodotta.

Si consideri il seguente enunciato (in cui, per ottenere una frase generabile dalla grammatica $\mathcal{G}$, che è ancora molto povera, siamo ricorsi ad una certa pesantezza stilistica)

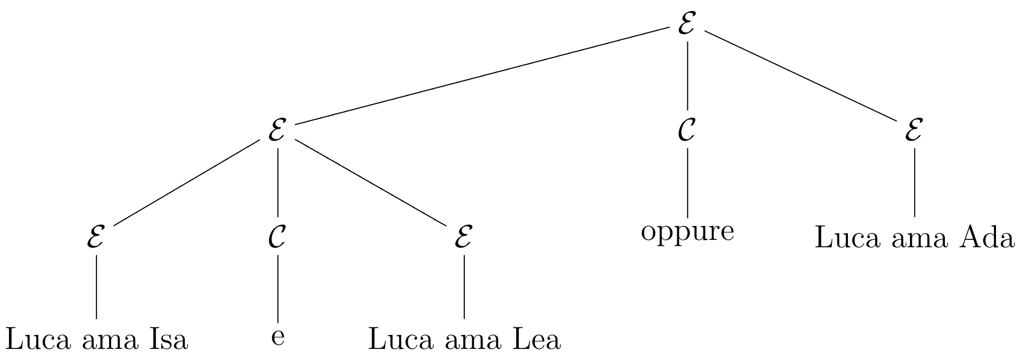
(5) *Luca ama Isa e Luca ama Lea oppure Luca ama Ada*

(più avanti saremo in grado, con una grammatica più potente, di generare anche "Luca ama Isa e Lea oppure Ada", frase che resta comunque soggetta alla stessa ambiguità). La frase (5) può essere generata in due modi differenti: (A) e (B) che riportiamo qui di seguito in forma schematica abbreviata (per semplicità).

(A)



(B)



(A) e (B) hanno significati differenti: se "Luca ama Ada" è vero, la (5), generata come in (B), è vera, ma può essere falsa se generata come in (A) (qualora "Luca ama Isa" sia falsa).

Si possono ottenere ambiguità più sofisticate usando meccanismi di generazione più complessi di quelli previsti da $\mathcal{G}$. Ad esempio la frase

(6) *Lucia mangia la marmellata e la mamma la pesca*

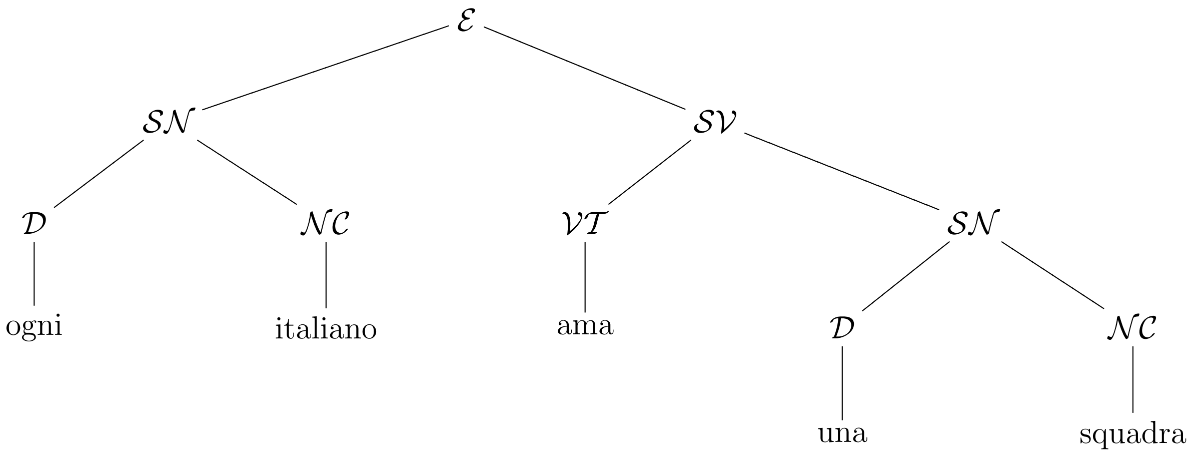
ha due letture, prodotte da un'ambiguità di generazione unita ad un'ambiguità lessicale (la "pesca" è un frutto ma anche la terza persona del verbo "pescare", usato nell'italiano popolare come sinonimo di "sorprendere").

Noi trascureremo casi di ambiguità della grammatica del tipo appena descritto poiché, nell'analisi semantica di una frase, analizzeremo non la frase in sé, ma un suo albero di generazione fissato. In altri termini supporremo che ci sia un dispositivo (che, se necessario, tenga conto anche degli aspetti pragmatici) che analizzi i differenti alberi di generazione e selezioni per noi quello corrispondente all'interpretazione intesa.

Il discorso relativo ai problemi di ambiguità è, tuttavia, molto complesso e coinvolge casi di tipo diverso dal precedente. Si consideri, ad esempio, la frase

(7) *Ogni italiano ama una squadra*

Essa ha un solo possibile albero di generazione:



tuttavia è ambigua: potrebbe significare che ognuno di noi fa il tifo per la sua squadra preferita (Milan, Inter, Juventus, Roma,...) oppure che tutti noi facciamo il tifo per la stessa squadra (per esempio la nazionale italiana durante i campionati mondiali di calcio).

Questa ambiguità è *semantica* e non potremo ignorarla. Riprenderemo il problema più avanti, ma anticipiamo fin d'ora la linea di soluzione: definiremo trasformazioni (proiezione/sollevamento) sugli alberi di generazione che produrranno differenti *forme logiche* di essi.

Analisi semantica delle proposizioni

1 Interpretazione del linguaggio

Per interpretare il linguaggio generato da $\mathcal{G}$ abbiamo bisogno innanzitutto di un insieme D detto *dominio* di interpretazione che raccolga tutti gli oggetti di cui stiamo parlando (sia quelli di cui conosciamo il nome come Paolo, Lucia, *ecc.* che eventualmente altri). Fissato D, definiremo *l'interpretazione* (cioè il significato) dei vari simboli terminali e vedremo come utilizzare tali interpretazioni per *calcolare* il significato delle espressioni composte prodotte dalla grammatica. I simboli terminali saranno interpretati in modo diverso a seconda della *categoria* di appartenenza ($\mathcal{NP}, \mathcal{VT}, \dots$) ma saranno sempre rappresentati da funzioni.

Formalmente un'*interpretazione* $\mathcal{I}$ di $\mathcal{G}$ è un insieme D munito di una corrispondenza che associa a simboli terminali funzioni insiemistiche, secondo i canoni che ora descriveremo.

Vedremo come, data un'interpretazione $\mathcal{I}$, sia possibile associare un significato ad ogni stringa terminale prodotta da $\mathcal{G}$. Il metodo è *composizionale*: vengono date regole ricorsive sugli alberi di generazione che calcolano il significato associato ai vari nodi sulla base del significato fornito da $\mathcal{I}$ per le foglie. Il meccanismo che governa queste regole ricorsive è, a questo livello, estremamente semplice: si tratta della pura *composizione insiemistica*.

Nomi propri Un nome proprio è una costante del linguaggio e, quindi, corrisponde a un elemento del dominio. Tale elemento sarà identificato con l'insieme delle sue proprietà; pertanto i nomi propri saranno interpretati come funzioni

$$\Omega^D \to \Omega$$

Per esempio l'interpretazione di "Pietro" è l'elemento $\utilde{\text{Pietro}}$ del dominio, identificato con la funzione che ad ogni $\mathcal{Q} \in \Omega^D$ associa $\mathcal{Q}(\utilde{\text{Pietro}})$, ossia il vero se $\utilde{\text{Pietro}}$ gode della proprietà $\mathcal{Q}$, il falso altrimenti. Cioè "Pietro" è interpretato come l'insieme delle proprietà di cui $\utilde{\text{Pietro}}$ gode.

Verbi intransitivi Saranno interpretati come funzioni caratteristiche di sottoinsiemi di D. Perciò, ad esempio, il verbo "corre" è interpretato come una funzione

$$\utilde{\text{corre}} : D \to \Omega$$

Intuitivamente, $\utilde{\text{corre}}\,(x) = 1$ se x corre, $\utilde{\text{corre}}\,(x) = 0$ se x non corre.

Verbi transitivi Tali verbi individuano relazioni binarie, cioè sottoinsiemi di D^2, per cui passando alle funzioni caratteristiche avremo, per esempio,

$$\utilde{\text{ama}} : D \times D \to \Omega$$

dove, intuitivamente, $\utilde{\text{ama}}\,(x, y) = 1$ se e solo se x ama y.

Verbi dativi Tali verbi corrispondono a relazioni ternarie, per cui, ad esempio,

$$\underset{\sim}{\text{dà}} : D \times D \times D \to \Omega$$

e $\underset{\sim}{\text{dà}}\ (x_1, x_2, x_3) = 1$ significa che x dà y a z.

Congiunzioni – connettivo Sono operazioni sui valori di verità, per esempio la "e" è l'operazione

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\wedge} \Omega$$

definita da

$1 \wedge 1 = 1$

$1 \wedge 0 = 0$

$0 \wedge 1 = 0$

$0 \wedge 0 = 0.$

Cosí "o" e "oppure" sono l'operazione[3]

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{\vee} \Omega$$

$1 \vee 1 = 1$

$1 \vee 0 = 1$

$0 \vee 1 = 1$

$0 \vee 0 = 0.$

Nomi comuni Vengono interpretati su predicati a un posto (esattamente come i verbi intransitivi) quindi avremo, per esempio:

$\underset{\sim}{\text{ragazzo}} : D \to \Omega$

$\underset{\sim}{\text{professore}} : D \to \Omega$

...

Resta il problema di come interpretare i determinanti e, quindi, anche i corrispondenti sintagmi nominali.

Vediamo a cosa devono corrispondere i sintagmi nominali come "ogni ragazzo". La frase

---

[3]In alcune lingue c'è anche un uso esclusivo della disgiunzione (vedi, ad esempio, il latino *aut*), che corrisponde all'operazione

$$\Omega \times \Omega \xrightarrow{+} \Omega$$

definita da $1 \vee 1 = 0, 1 \vee 0 = 1, 0 \vee 1 = 1, 0 \vee 0 = 0$. L'italiano è un po' oscillante in questo senso, per cui le disgiunzioni vengono interpretate come $\vee$ o come $+$ a seconda del contesto. Noi però privilegeremo sempre l'interpretazione inclusiva come $\vee$.

(1) *Ogni ragazzo corre*

deve essere interpretata su un valore di verità $1 \to \Omega$; d'altra parte sappiamo che

$$\underset{\sim}{\text{corre}} : D \to \Omega$$

è un sottoinsieme (o meglio la funzione caratteristica di un sottoinsieme) del dominio D. Se usiamo la λ-astrazione, possiamo ottenere

$$\{\lambda x | \underset{\sim}{\text{corre}}(x)\} : 1 \to \Omega^D.$$

Per ottenere un valore di verità dovremo avere che

$$\Omega^D \xrightarrow{[\![\text{ogni ragazzo}]\!]} \Omega$$

perché allora si potrebbe comporre

$$1 \xrightarrow{\{\lambda x | \underset{\sim}{\text{corre}}(x)\}} \Omega^D \xrightarrow{[\![\text{ogni ragazzo}]\!]} \Omega$$

e ottenere appunto un valore di verità.

Le funzioni

$$f : \Omega^D \longrightarrow \Omega$$

sono dette *quantificatori generalizzati.* Esse corrispondono a insiemi di sottoinsiemi, nel senso che associano ad ogni sottoinsieme un valore di verità. Cosí $[\![\text{ogni ragazzo}]\!]$ assocerà il vero ad una proprietà $\mathcal{Q}$ se la proprietà $\mathcal{Q}$ è goduta da tutti i ragazzi; $[\![\text{qualche ragazzo}]\!]$ assocerà il vero a $\mathcal{Q}$ se $\mathcal{Q}$ è goduta da almeno un ragazzo.

Supponiamo, ad esempio, che D sia costituita da quattro persone $D = \{a, b, c, d\}$, di cui solo a e b sono ragazzi. Se la proprietà $\mathcal{Q}$ di *avere i capelli biondi* è goduta da b e da c, allora $[\![\text{qualche ragazzo}]\!](\mathcal{Q}) = 1$. Se la proprietà $\mathcal{Q}$ di *avere i capelli neri* è goduta soltanto da d, allora $[\![\text{qualche ragazzo}]\!](\mathcal{Q}) = 0$.

Sembra ragionevole quindi che i sintagmi nominali siano interpretati come quantificatori generalizzati, ossia come funzioni

$$f : \Omega^D \longrightarrow \Omega\ .$$

Resta il problema dei determinanti che si risolve facilmente. Se

$$[\![\text{ogni ragazzo}]\!] : \Omega^D \longrightarrow \Omega$$

poiché abbiamo che

$$1 \xrightarrow{\{\lambda x | \underset{\sim}{\text{ragazzo}}(x)\}} \Omega^D$$

possiamo supporre che

$$\underset{\sim}{\text{ogni}} : \Omega^D \times \Omega^D \longrightarrow \Omega$$

sicché componendo

$$\Omega^D \simeq 1 \times \Omega^D \xrightarrow{\{\lambda x|\utilde{\text{ragazzo}}(x)\}\times 1} \Omega^D \times \Omega^D \xrightarrow{[\![\, \utilde{\text{ogni}} \,]\!]} \Omega$$

otteniamo proprio

$$\Omega^D \xrightarrow{[\![\text{ogni ragazzo}]\!]} \Omega$$

cioè un quantificatore generalizzato.

Possiamo supporre che $\utilde{\text{ogni}}$ sia l'inclusione tra sottoinsiemi

$$\subseteq : \Omega^D \times \Omega^D \to \Omega$$

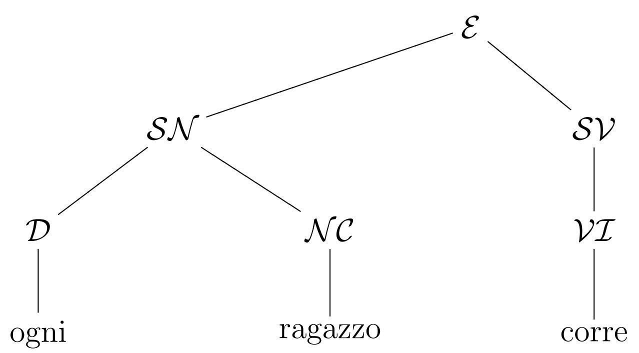
descritta da

$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \text{ se e solo se la formula } \forall x(\mathcal{P}(x) \to \mathcal{Q}(x)) \text{ è vera.}$$

La valutazione della frase

(1) *Ogni ragazzo corre*

generata dall'albero



procede nel modo seguente. Per valutare $[\![\text{ogni ragazzo}]\!]$, prendiamo $\utilde{\text{ogni}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ e sostituiamo $\{\lambda x|\utilde{\text{ragazzo}}(x)\}$ a $\mathcal{P}$, ottenendo

$$\{\lambda x|\utilde{\text{ragazzo}}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}.$$

Poi applichiamo il λ-operatore a $\utilde{\text{corre}}(x)$, ottenendo

$$\{\lambda x|\utilde{\text{corre}}(x)\}$$

e lo sostituiamo a $\mathcal{Q}$, ottenendo l'enunciato (non ci sono più variabili libere)

$$\{\lambda x|\utilde{\text{ragazzo}}(x)\} \subseteq \{\lambda x|\utilde{\text{corre}}(x)\}$$

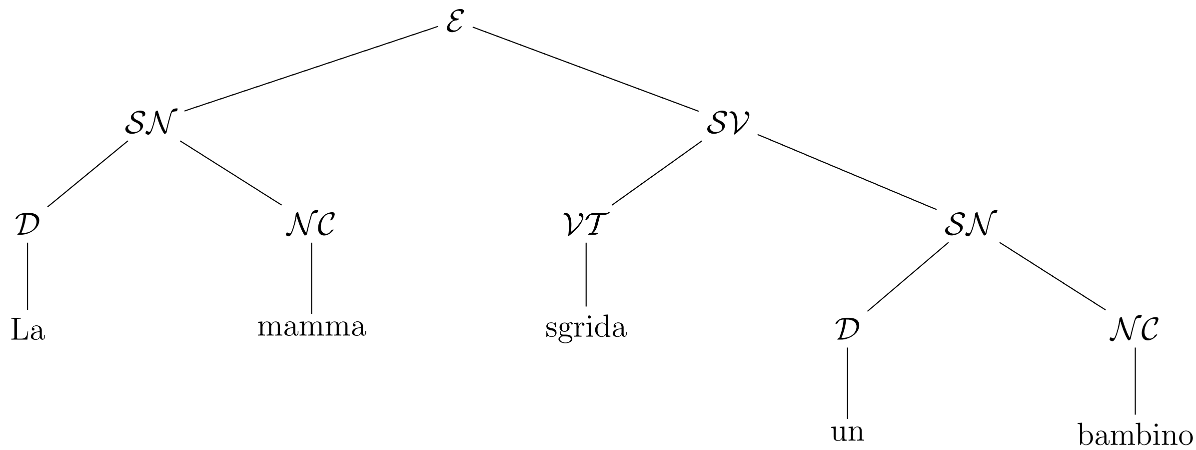
e quindi la formula del prim'ordine

$$\forall x(\utilde{\text{ragazzo}}(x) \to \utilde{\text{corre}}(x))$$

che dà il significato inteso di (1).

Vediamo un altro esempio.

(2) *La mamma sgrida un bambino*



Qui ci imbattiamo in due nuovi tipi di determinanti: $\utilde{\text{un}}$ e $\utilde{\text{la}}$.

Siano $\utilde{\text{un}} : \Omega^D \times \Omega^D \to \Omega$ definita da

$$\utilde{\text{un}}\,(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 1 \text{ se e solo se la formula } \exists x(\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)) \text{ è vera}$$

(cioè se $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$) e $\utilde{\text{la}} : \Omega^D \times \Omega^D \to \Omega$ definita in modo analogo dalla formula

$$\exists z(\mathcal{P} = \{z\} \wedge \mathcal{Q}(z))$$

dove $\mathcal{P} = \{z\}$ è un'abbreviazione per $\forall y(\mathcal{P}(y) \leftrightarrow y = z)$. Allora

$[\![\text{un bambino}]\!]$ è $\{\lambda x | \utilde{\text{bambino}}(x)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$,

$[\![\text{la mamma}]\!]$ diventa $\exists z(\{\lambda x | \utilde{\text{mamma}}(x)\} = \{z\} \wedge \mathcal{Q}(z))$.

Ricordiamo ora che

$$\utilde{\text{sgrida}}(x_1, x_2) : D \times D \to \Omega.$$

Intuitivamente è chiaro che il quantificatore generalizzato $[\![\text{la mamma}]\!]$ vincola la variabile x_1 (è la mamma che sgrida), mentre il quantificatore generalizzato $[\![\text{un bambino}]\!]$ vincola

x_2 (è il bambino ad essere sgridato). Dunque per valutare $[\![\text{sgrida un bambino}]\!]$ operiamo una λ-astrazione su x_2 e sostituiamo il risultato a $\mathcal{Q}$ in $[\![\text{un bambino}]\!]$. Il risultato è

$$\{\lambda x|\underset{\sim}{\mathrm{bambino}}(x)\} \cap \{\lambda x_2|\underset{\sim}{\mathrm{sgrida}}(x_1, x_2)\} \neq \emptyset$$

Possiamo già λ-convertire questa espressione in

$$\exists x(\underset{\sim}{\mathrm{bambino}}(x) \wedge \underset{\sim}{\mathrm{sgrida}}(x_1, x)).$$

Per continuare λ-astraiamo su x_1 (che è la variabile vincolata da $[\![\text{la mamma}]\!]$) e sostituiamo il risultato a $\mathcal{Q}$ in $[\![\text{la mamma}]\!]$. Il risultato è (usiamo la λ-conversione su $\{\lambda x_1 \mid \exists x(\underset{\sim}{\mathrm{bambino}}(x) \wedge \underset{\sim}{\mathrm{sgrida}}(x_1, x)\}(z))$

$$\exists z(\{\lambda x|\underset{\sim}{\mathrm{mamma}}(x)\} = \{z\} \wedge \exists x(\underset{\sim}{\mathrm{bambino}}(x) \wedge \underset{\sim}{\mathrm{sgrida}}(z, x)).$$

Tenendo conto della precedente definizione di $\mathcal{P} = \{z\}$, possiamo λ-convertire in

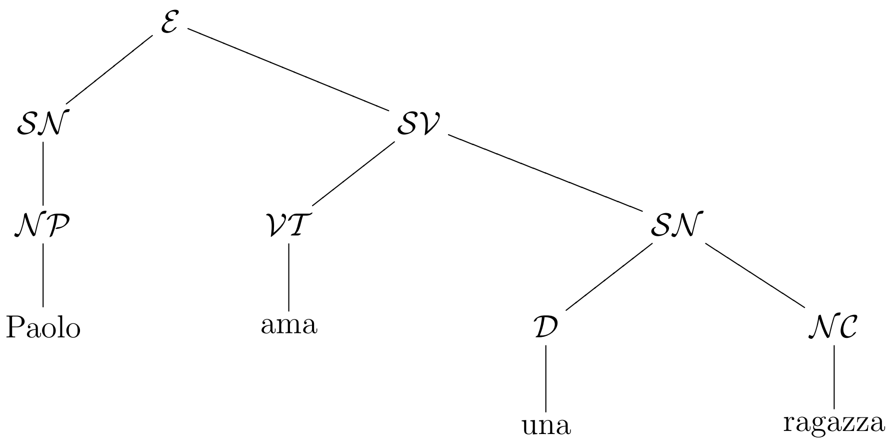
$$\exists z(\forall y(\underset{\sim}{\mathrm{mamma}}(y) \leftrightarrow y = z) \wedge \exists x(\underset{\sim}{\mathrm{bambino}}(x) \wedge \underset{\sim}{\mathrm{sgrida}}(z, x)).$$

Quella che abbiamo ottenuto è un'analisi soddisfacente di (2): in effetti (2) contiene anche l'informazione (contenuta nell'articolo "la") che, nel contesto in cui (2) è affermata, ci deve essere una sola persona che è mamma (altrimenti (2) sarebbe considerata falsa).

Espressioni come "la mamma", "la regina", ...sono dette *descrizioni definite* (qui abbiamo implicitamente esposto l'analisi delle descrizioni definite proposta da B. Russel – esiste anche un'altra analisi in termini di *presupposizioni*, dovuta a G. Frege, su cui non ci soffermiamo per semplicità).

Vediamo un ultimo esempio.

(3) *Paolo ama una ragazza*



Poiché $\underset{\sim}{\mathrm{una}}$ è $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$, si ha

$$[\![\text{una ragazza}]\!] = \{\lambda x|\underset{\sim}{\mathrm{ragazza}}(x)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$$

e, quindi, otteniamo

$$\begin{aligned} [\![\text{ama una ragazza}]\!] &= \{\lambda x | \utilde{\text{ragazza}}(x)\} \cap \{\lambda x_2 | \utilde{\text{ama}}(x_1, x_2)\} \neq \emptyset \\ &= \exists x(\utilde{\text{ragazza}}(x) \wedge \utilde{\text{ama}}(x_1, x)) \end{aligned}$$

(dove abbiamo già convertito al prim'ordine).

Il $\mathcal{SN}$ "Paolo" ora è interpretato in $\mathcal{Q}(\utilde{\text{Paolo}})$. Per valutare $[\![\text{Paolo ama una ragazza}]\!]$, infine dobbiamo sostituire a $\mathcal{Q}$ l'espressione (λ-astratta su x_1)

$$\{\lambda x_1 |\ \exists x(\utilde{\text{ragazza}}(x) \wedge \utilde{\text{ama}}(x_1, x))\}.$$

Otteniamo

$$\{\lambda x_1 |\ \exists x(\utilde{\text{ragazza}}(x) \wedge \utilde{\text{ama}}(x_1, x))\}(\utilde{\text{Paolo}})$$

che, per λ-conversione, dà

$$\exists x(\utilde{\text{ragazza}}(x) \wedge \utilde{\text{ama}}(\utilde{\text{Paolo}}, x))$$

che rispecchia esattamente le condizioni di verità di (3).

Possiamo ora scrivere le condizioni ricorsive formali per l'interpretazione delle espressioni prodotte dalla grammatica $\mathcal{G}$ (si tengano in mente le regole di $\mathcal{G}$).

Regole ricorsive
per l'interpretazione delle espressioni prodotte da $\mathcal{G}$

1. se α è un simbolo terminale
   (a) di categoria "determinante" (ogni, qualche, un, il) oppure "connettivo" (e, o) allora il significato è quello fissato in precedenza
   (b) altrimenti $[\![\alpha]\!] = \utilde{\alpha}$ è fissato dal contesto
2. $[\![\ [_{\mathcal{E}}\ \mathcal{SN}\ \ \mathcal{SV}]\ ]\!] = [\![\mathcal{SN}]\!](\{\lambda x_1 |\ [\![\mathcal{SV}]\!](x_1)\}/\mathcal{Q})$
3. $[\![\ [_{\mathcal{E}}\ \mathcal{E}_1\ \ \mathcal{C}\ \ \mathcal{E}_2]\ ]\!] = [\![\mathcal{C}]\!]([\![\mathcal{E}_1]\!]/t_1, [\![\mathcal{E}_2]\!]/t_2)$
4. $[\![\ [_{\mathcal{SV}}\ \mathcal{VI}]\ ]\!] = [\![\mathcal{VI}]\!]$
5. $[\![\ [_{\mathcal{SV}}\ \mathcal{VT}\ \ \mathcal{SN}]\ ]\!] = [\![\mathcal{SN}]\!](\{\lambda x_2 |\ [\![\mathcal{VT}]\!](x_1, x_2)\}/\mathcal{Q})$
6. $[\![\ [_{\mathcal{SV}}\ \mathcal{VD}\ \ \mathcal{SN}_1\ \text{ a }\ \mathcal{SN}_2]\ ]\!] = [\![\mathcal{SN}_1]\!](\{\lambda x_2 |\ [\![\mathcal{SN}_2]\!](\{\lambda x_3 |\ [\![\mathcal{VD}]\!](x_1, x_2, x_3)\}/\mathcal{Q})\}/\mathcal{Q})$
7. $[\![\ [_{\mathcal{SN}}\ \mathcal{NP}]\ ]\!] = \mathcal{Q}([\![\mathcal{NP}]\!])$
8. $[\![\ [_{\mathcal{C}}\ \alpha]\ ]\!] = [\![\alpha]\!](t_1, t_2)$
9. $[\![\ [_{\mathcal{VI}}\ \alpha]\ ]\!] = [\![\alpha]\!](x_1)$
10. $[\![\ [_{\mathcal{VT}}\ \alpha]\ ]\!] = [\![\alpha]\!](x_1, x_2)$
11. $[\![\ [_{\mathcal{VD}}\ \alpha]\ ]\!] = [\![\alpha]\!](x_1, x_2, x_3)$
12. $[\![\ [_{\mathcal{NP}}\ \alpha]\ ]\!] = [\![\alpha]\!]$
13. $[\![\ [_{\mathcal{SN}}\ \mathcal{D}\ \ \mathcal{NC}]\ ]\!] = [\![\mathcal{D}]\!]([\![\mathcal{NC}]\!]/\mathcal{P}, \mathcal{Q})$
14. $[\![\ [_{\mathcal{NC}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda x |\ [\![\alpha]\!](x)\}$
15. $[\![\ [_{\mathcal{D}}\ \alpha]\ ]\!] = [\![\alpha]\!](\mathcal{P}, \mathcal{Q})$

Figura 3: Interpretazione di $\mathcal{G}$

Il frammento del linguaggio naturale coperto da $\mathcal{G}$ è ancora piuttosto semplice. Tuttavia siamo già in grado di compiere alcune semplici inferenze; vediamo un esempio (che ci servirà anche per prendere ulteriore confidenza con le clausole ricorsive appena formalizzate).

1) *Giovanni regala un libro a ogni bambino*

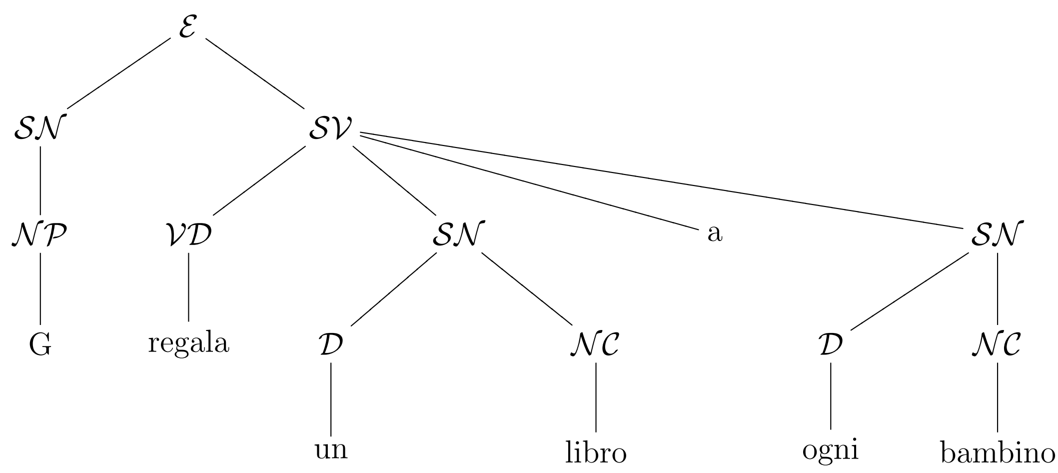
2) *Paolo è un bambino*

3) *Giovanni regala un libro a Paolo.*

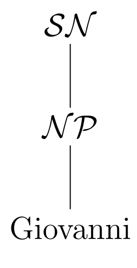
La 3) è conseguenza logica di 1) e 2). Possiamo stabilirlo nel modo seguente: traduciamo 1) in una λ-espressione che semplifichiamo ad una formula del prim'ordine A_1. Facciamo lo stesso con 2) e 3) ottenendo A_2 e A_3. Infine dimostriamo $A_1, A_2 \Rightarrow A_3$, utilizzando un calcolo (per esempio il calcolo dei tableaux) per la logica del prim'ordine.

Tratteremo *"è un bambino"* come un $\mathcal{VI}$, bambino(x), che viene interpretato come un predicato unario, esattamente come il $\mathcal{NC}$ *"bambino"* (questo è un procedimento generale, potremmo aggiungere a $\mathcal{G}$ la regola "$\mathcal{VI} \rightarrow$ è un $\mathcal{NC}$" che serve a generare i predicati nominali).

Consideriamo gli alberi di generazione di 1), 2), 3) e applichiamo le regole ricorsive per l'interpretazione semantica (con la notazione logico/linguistica).[4] Si ottiene (il lettore verifichi i passaggi utilizzando le 1.–15., sia per generare le frasi italiane sia per interpretarle):

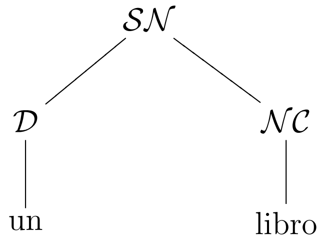
(1) 

Valutiamo

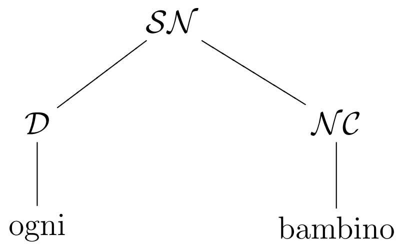


[4]In alcuni casi scriveremo solo l'iniziale del nome proprio come etichetta di un nodo dell'albero.

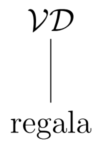
con $\mathcal{Q}(\utilde{\text{Giovanni}})$; inoltre



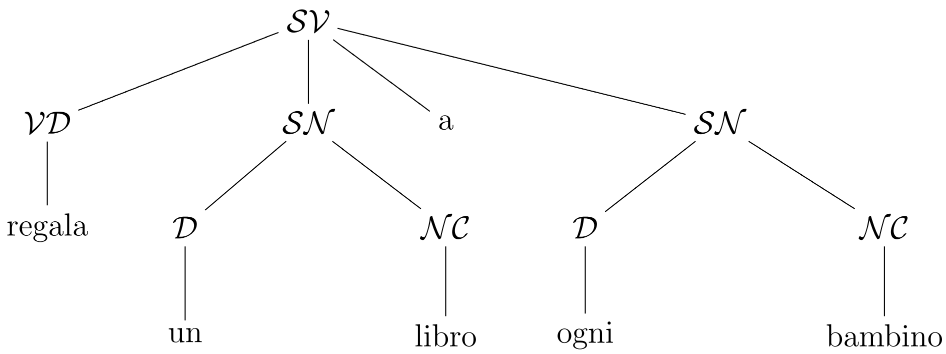
si valuta con $\mathcal{Q} \cap \{\lambda x | \utilde{\text{libro}}(x)\} \neq \emptyset$ e



con $\{\lambda x | \utilde{\text{bambino}}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}$. Infine l'interpretazione di



è $\utilde{\text{regala}}(x_1, x_2, x_3)$ e quella di



è

$$\{\lambda x | \, \utilde{\text{libro}}(x)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset [\{\lambda x_2| \mid \{\lambda x| \, \utilde{\text{bambino}}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}(\{\lambda x_3| \, \utilde{\text{regala}}(x_1, x_2, x_3)\}/\mathcal{Q})\}/\mathcal{Q}]$$

$$= \{\lambda x| \, \utilde{\text{libro}}(x)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset [\{\lambda x_2| \, \{\lambda x| \, \utilde{\text{bambino}}(x)\} \subseteq \{\lambda x_3| \, \utilde{\text{regala}}(x_1, x_2, x_3)\}\}/\mathcal{Q}]$$

$$= \{\lambda x| \, \utilde{\text{libro}}(x)\} \cap \{\lambda x_2| \, \{\lambda x \mid (\utilde{\text{bambino}}(x)\} \subseteq \{\lambda x_3| \, \utilde{\text{regala}}(x_1, x_2, x_3)\}\} \neq \emptyset$$

Usando la λ-conversione due volte, abbiamo

$$= \{\lambda x|\ \underset{\sim}{\text{libro}}(x)\} \cap \{\lambda x_2|\ \forall y(\underset{\sim}{\text{bambino}}(y) \to \underset{\sim}{\text{regala}}(x_1, x_2, y))\} \neq \emptyset$$

$$= \exists z(\underset{\sim}{\text{libro}}(z) \wedge \forall y(\underset{\sim}{\text{bambino}}(y) \to \underset{\sim}{\text{regala}}(x_1, z, y)))$$

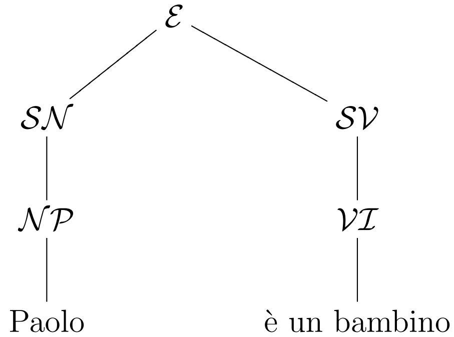
In definitiva, otteniamo per 1)

$$\{\lambda x_1|\ \exists z(\underset{\sim}{\text{libro}}(z) \wedge \forall y(\underset{\sim}{\text{bambino}}(y) \to \underset{\sim}{\text{regala}}(x_1, z, y)))\}(\underset{\sim}{\text{Giovanni}})$$

$$= \exists z(\underset{\sim}{\text{libro}}(z) \wedge \forall y(\underset{\sim}{\text{bambino}}(y) \to \underset{\sim}{\text{regala}}(\underset{\sim}{\text{Giovanni}}, z, y)))$$

Questa è la formula A_1 che traduce 1).

(2)

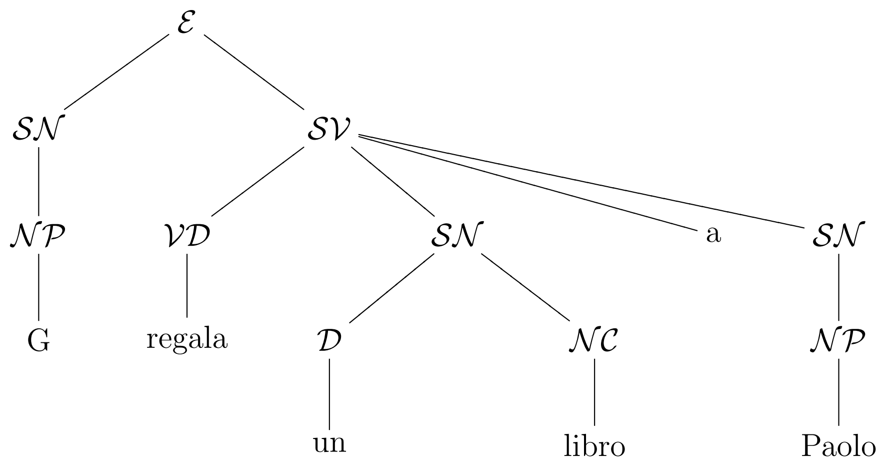


si valuta con

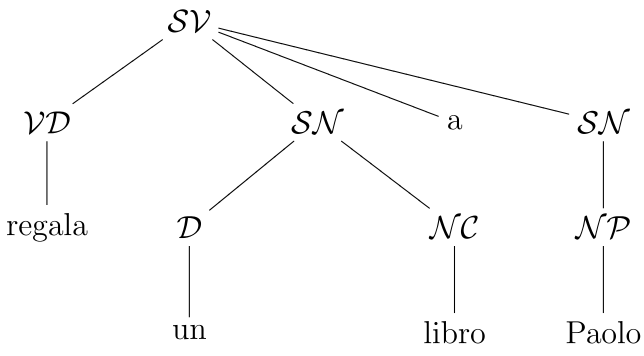
$$\{\lambda x|\ \underset{\sim}{\text{bambino}}(x)\}(\underset{\sim}{\text{Paolo}}) = \underset{\sim}{\text{bambino}}(\underset{\sim}{\text{Paolo}}).$$

Questa è la formula A_2 che traduce 2).

(3)



Qui interpretiamo



nel modo seguente:

$$\{\lambda x \mid |\text{li}\utilde{\text{bro}}(x)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset[\{\lambda x_2|\ \mathcal{Q}(\text{P}\utilde{\text{ao}}\text{lo})(\{\lambda x_3|\ \text{re}\utilde{\text{ga}}\text{la}(x_1, x_2, x_3)/\mathcal{Q}\})\}/\mathcal{Q}]$$

$$= \{\lambda x \mid \text{li}\utilde{\text{bro}}(x)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset[\{\lambda x_2|\ \{\lambda x_3|\ \text{re}\utilde{\text{ga}}\text{la}(x_1, x_2, x_3)\}(\text{P}\utilde{\text{ao}}\text{lo})\}/\mathcal{Q}]$$

$$= \{\lambda x|\ \text{li}\utilde{\text{bro}}(x)\} \cap \{\lambda x_2|\ (\{\lambda x_3|\ \text{re}\utilde{\text{ga}}\text{la}(x_1, x_2, x_3)\}(\text{P}\utilde{\text{ao}}\text{lo})\} \neq \emptyset$$

che per λ- conversione diventa

$$\exists z(\text{li}\utilde{\text{bro}}(z) \wedge \text{re}\utilde{\text{ga}}\text{la}(x_1, z, \text{P}\utilde{\text{ao}}\text{lo})).$$

La 3) viene allora valutata con

$$\mathcal{Q}(\text{Gio}\utilde{\text{va}}\text{nni})(\{\lambda x_1|\ \exists z(\text{li}\utilde{\text{bro}}(z) \wedge \text{re}\utilde{\text{ga}}\text{la}(x_1, z, \text{P}\utilde{\text{ao}}\text{lo})\}/\mathcal{Q})$$

$$= \{\lambda x_1|\ \exists z(\text{li}\utilde{\text{bro}}(z) \wedge \text{re}\utilde{\text{ga}}\text{la}(x_1, z, \text{P}\utilde{\text{ao}}\text{lo})\}(\text{Gio}\utilde{\text{va}}\text{nni})$$

$$= \exists z(\text{li}\utilde{\text{bro}}(z) \wedge \text{re}\utilde{\text{ga}}\text{la}(\text{Gio}\utilde{\text{va}}\text{nni}, z, \text{P}\utilde{\text{ao}}\text{lo})).$$

Questa è A_3 che traduce 3). Si può ora dimostrare formalmente $A_1, A_2 \Rightarrow A_3$ (il lettore effettui la verifica).

Naturalmente il metodo per essere efficace (nell'ottica di un processamento automatico dell'informazione contenuta nei testi in linguaggio naturale) deve poter coprire un frammento più significativo di quello coperto da $\mathcal{G}$. Nei prossimi paragrafi faremo estensioni successive di $\mathcal{G}$ in modo da ampliarne sempre di più la portata. Prima però dobbiamo occuparci di un altro problema. La frase

3) *Giovanni regala un libro a ogni bambino*

è ambigua. Come l'abbiamo intesa noi (si veda la A_1 che la traduce), vuol dire che Giovanni regala lo stesso libro a tutti i bambini (ad esempio "Pinocchio"), ma la stessa frase potrebbe voler dire invece che Giovanni regala “Biancaneve e i Sette Nani” a Paolo, “Pinocchio” a Pietro, *ecc.*

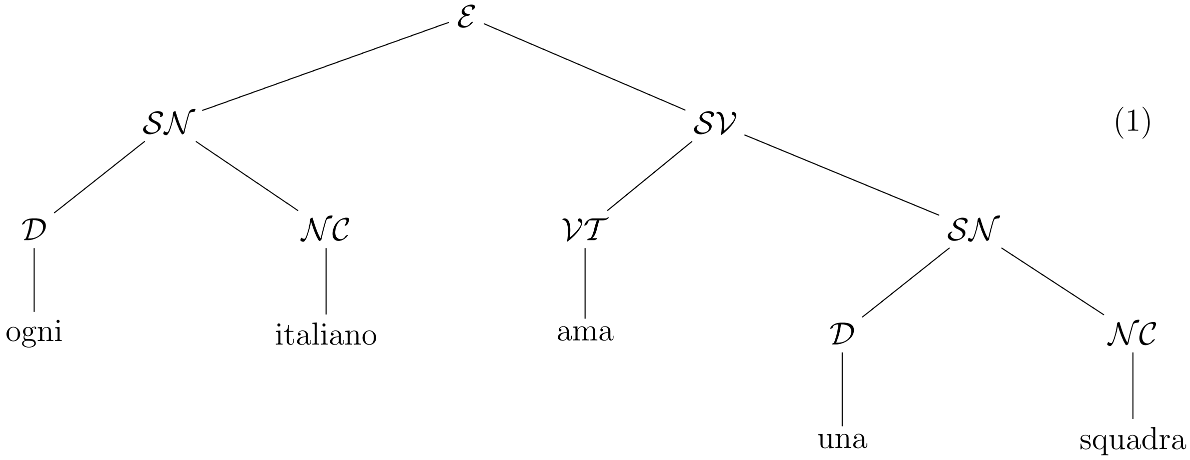
Il problema è il seguente: le nostre clausole ricorsive prevedono un ordine rigido prefissato nell’applicazione dei quantificatori generalizzati e tale ordine rigido non è sempre quello che corrisponde al significato inteso delle frasi.

2 Distinzioni di ambito

Per illustrare la trattazione delle ambiguità di ambito dei quantificatori, riprendiamo l'esempio della frase

(1) *Ogni italiano ama una squadra*

già incontrata nel paragrafo **??** della parte I (anziché la frase, più complessa, che abbiamo visto in chiusura del paragrafo precedente)



(1)

Innnazitutto, per avere un po' più di libertà, ci concediamo la possibilità di usare in modo meno rigido le variabili, ossia potremo scrivere (utilizzando la notazione logico/linguistica)

$$\underset{\sim}{\mathrm{ama}}(x, y) : D \times D \to \Omega$$

anziché sempre soltanto

$$\underset{\sim}{\mathrm{ama}}(x_1, x_2) : D \times D \to \Omega.$$

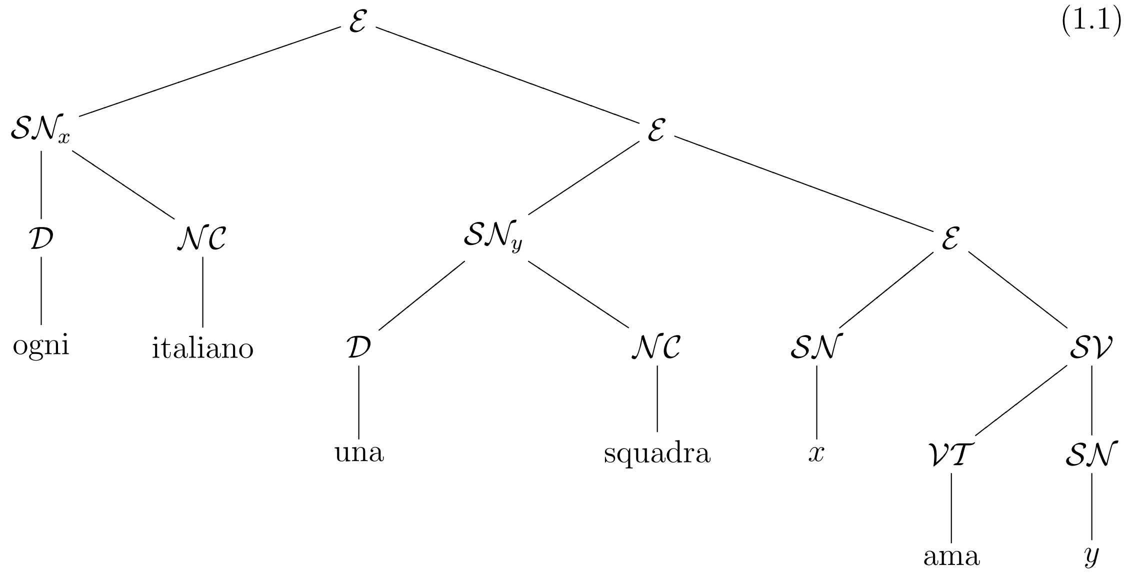
Usando (x, y) anziché (x_1, x_2), intendiamo implicitamente che x varia sulla prima coordinata di $D \times D$ e y sulla seconda. In generale, usando $y, w, u, z, \dots$, sarà chiaro dal contesto su quale coordinata varia y, su quale varia w, *ecc.*

Le due letture di (1) corrispondono alle due seguenti formule del prim'ordine

1.1) $\forall x(\underset{\sim}{\mathrm{italiano}}(x) \to \exists y(\underset{\sim}{\mathrm{squadra}}(y) \wedge \underset{\sim}{\mathrm{ama}}(x, y)))$

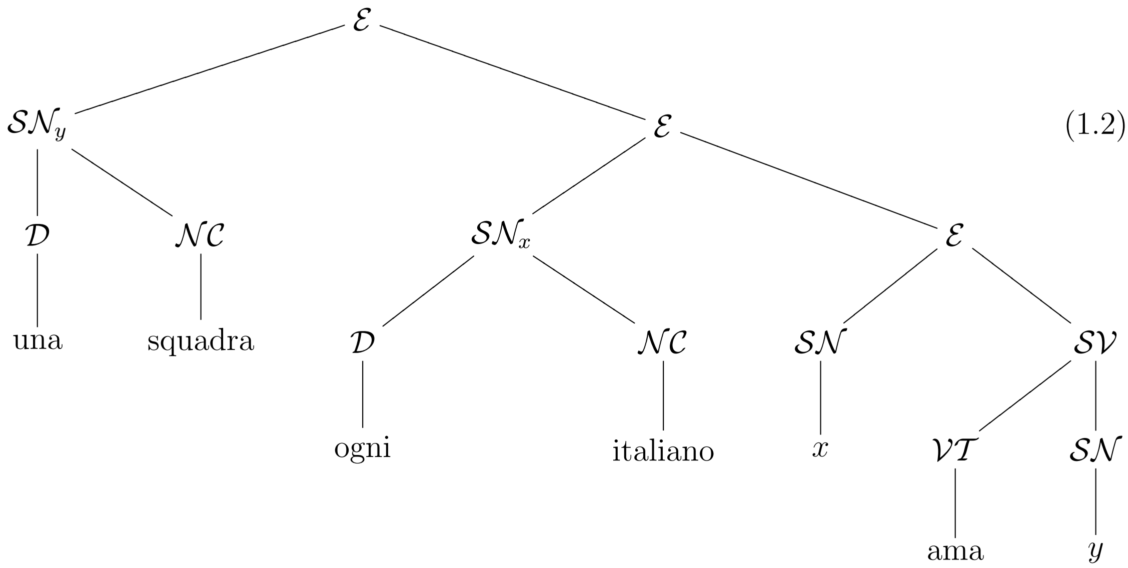
1.2) $\exists y(\underset{\sim}{\mathrm{squadra}}(y) \wedge \forall x(\underset{\sim}{\mathrm{italiano}}(x) \to \underset{\sim}{\mathrm{ama}}(x, y)))$

Le formule (1.1) e (1.2) differiscono per l'ordine in cui i quantificatori generalizzati "ogni italiano" (che vincola la variabile x) e "una squadra" (che vincola la variabile y) sono applicati al verbo transitivo "ama". Possiamo pensare che (1.1) e (1.2) corrispondano in realtà a *due diversi alberi* (che non sono propriamente alberi generati da $\mathcal{G}$) ossia rispettivamente a



(1.1)

e



(1.2)

Come si può vedere ora $\mathcal{SN}$ può generare solo una variabile, inoltre ci sono le nuove categorie $\mathcal{SN}_x$, $\mathcal{SN}_y$,... dette *sintagmi nominali sollevati*. Diciamo che (1.1) e (1.2) sono *forme logiche* differenti di (1).

Definiremo una nuova grammatica $\mathcal{G}_l$ che genera solo forme logiche. In più ci saranno regole particolari che potranno far passare da alberi generati da $\mathcal{G}_l$ ad alberi generati da $\mathcal{G}$.

Queste nuove regole non saranno regole di una grammatica formale, saranno piuttosto *regole di trasformazione di alberi di generazione*. Esse possono essere date come regole di *sollevamento* (che fanno passare da alberi prodotti da $\mathcal{G}$ ad alberi prodotti da $\mathcal{G}_l$) o come regole di *proiezione* (che fanno passare da alberi prodotti da $\mathcal{G}_l$ ad alberi prodotti da $\mathcal{G}$). Benché la prima strada sia empiricamente la più adeguata, scegliamo la seconda per semplicità didattica.

Gli alberi prodotti da $\mathcal{G}_l$ saranno tutti intepretabili, cioè sarà sempre possibile associare ad essi un significato usando regole ricorsive (dello stesso tipo di quelle viste in precedenza). Tuttavia non tutti gli alberi di $\mathcal{G}_l$ saranno proiettabili su un albero di $\mathcal{G}$ e, naturalmente, più alberi di $\mathcal{G}_l$ potranno essere proiettabili sullo *stesso* albero di $\mathcal{G}$. Questo approccio semplifica la trattazione, ma lascia un po' in sospeso il problema algoritmico (di cui ci occuperemo solo marginalmente più avanti) della ricerca (sistematica e non ridondante) di tutte le forme logiche corrispondenti a un albero di $\mathcal{G}$ fissato, ossia di tutti gli alberi di $\mathcal{G}_l$ proiettabili sull'albero dato. Resta anche in sospeso la questione (ben più sfumata) di come operare la scelta fra le varie forme logiche di uno stesso albero di $\mathcal{G}$, sulla base di criteri fissati, ad esempio di criteri di tipo pragmatico.

Diamo ora le regole di $\mathcal{G}_l$.

Regole di $\mathcal{G}_l$

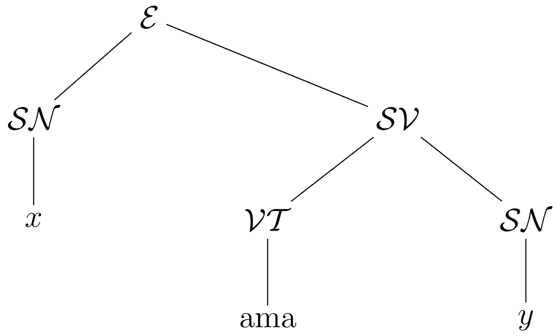
1. $\mathcal{E} \rightarrow \ \mathcal{SN}_x \ \ \mathcal{E}$ per ogni variabile x
2. $\mathcal{E} \rightarrow \ \mathcal{SN} \ \ \mathcal{SV}$
3. $\mathcal{E} \rightarrow \ \mathcal{E} \ \ \mathcal{C} \ \ \mathcal{E}$
4. $\mathcal{SV} \rightarrow \ \mathcal{VI}$
5. $\mathcal{SV} \rightarrow \ \mathcal{VT} \ \ \mathcal{SN}$
6. $\mathcal{SV} \rightarrow \ \mathcal{VD} \ \ \mathcal{SN}$ a $\mathcal{SN}$
7. $\mathcal{SN} \rightarrow \ x|y|z|x_1|\ldots$
8. $\mathcal{C} \rightarrow$ e | o | oppure |...
9. $\mathcal{VI} \rightarrow$ corre | salta | va |...
10. $\mathcal{VT} \rightarrow$ ama | picchia | vede |...
11. $\mathcal{VD} \rightarrow$ dà | regala |...
12. $\mathcal{NP} \rightarrow$ Luca | Lea | Isa |...
13. $\mathcal{SN}_x \rightarrow \ \mathcal{D} \ \ \mathcal{NC}$ per ogni variabile x
14. $\mathcal{NC} \rightarrow$ ragazzo | amico |...
15. $\mathcal{D} \rightarrow$ ogni | qualche | un |...
16. $\mathcal{SN}_x \rightarrow \ \mathcal{NP}$ per ogni variabile x.

Figura 4: La grammatica $\mathcal{G}_l$

Semanticamente, una cosa è cambiata in modo rilevante: un'espressione terminale α di categoria $\mathcal{E}$ ora contiene delle variabili; se α contiene, ad esempio, le variabili x, y, z avremo che $[\![\alpha]\!]$ non è più un enunciato bensí:

$$[\![\alpha]\!](x, y, z) : D \times D \times D \to \Omega$$

Si noti che $\mathcal{G}_l$ può generare alberi come

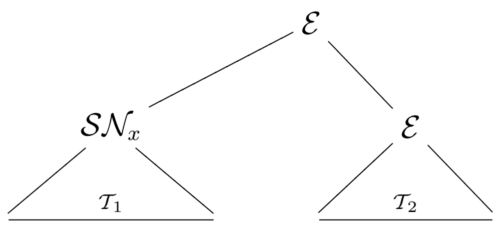


che non sono proiettabili su alberi di $\mathcal{G}$ e che però sono interpretabili nel nostro caso con

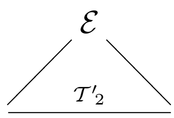
$$\underset{\sim}{\text{ama}}(x, y) : D \times D \to \Omega.$$

Questa soluzione può sembrare un po' artificiosa, tuttavia vedremo che sarà utile per interpretare l'uso deittico dei pronomi. Possiamo ora dare la seguente

Definizione 2.1 Una *proiezione* è una trasformazione che mappa un albero del tipo



dove $\mathcal{T}_2$ ha un'unica foglia marcata con la variabile x, nell'albero



dove $\mathcal{T}'_2$ è l'albero ottenuto da $\mathcal{T}_2$ rimpiazzando con $\mathcal{T}_1$ la foglia marcata con la variabile x.[5] Scriviamo

$$\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{T}'$$

per dire che $\mathcal{T}'$ è ottenuto da $\mathcal{T}$ applicando una proiezione ad un *sottoalbero* di $\mathcal{T}$. Scriviamo

$$\mathcal{T} \Longrightarrow^* \mathcal{T}'$$

[5]Per ora assumiamo che la trasformazione sia *illecita* qualora $\mathcal{T}_2$ abbia zero o più di una foglia marcata con la variabile x.

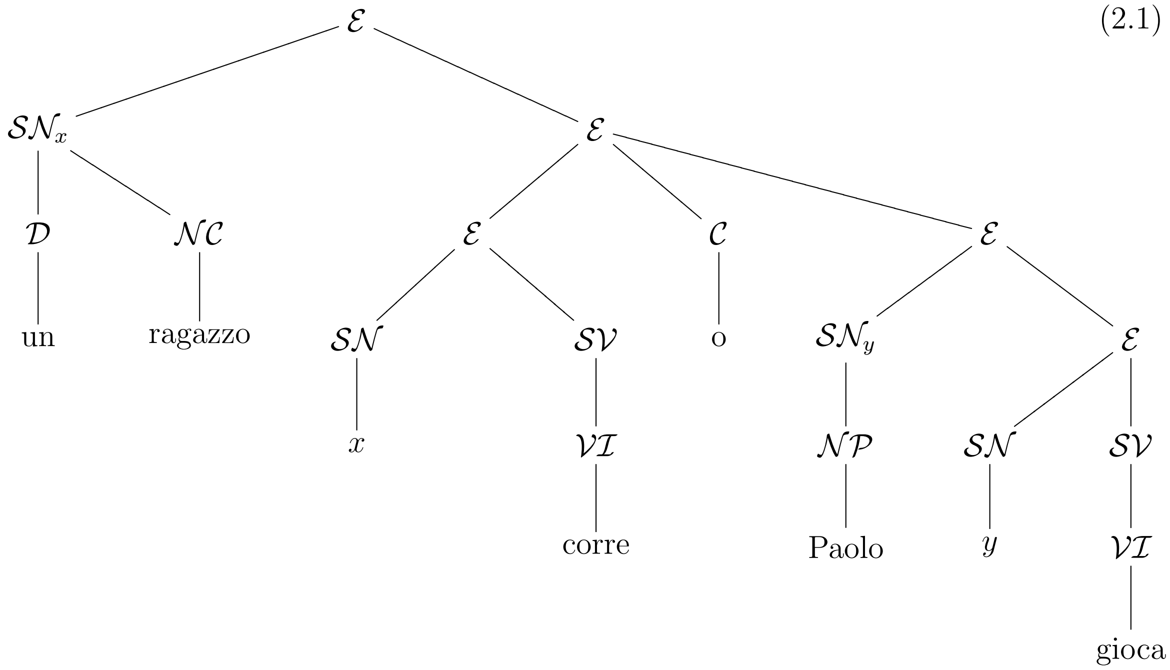
qualora esista una sequenza

$$\mathcal{T}_1 \Longrightarrow \mathcal{T}_2 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \mathcal{T}_n$$

con $n \geq 1$ e $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}'$.

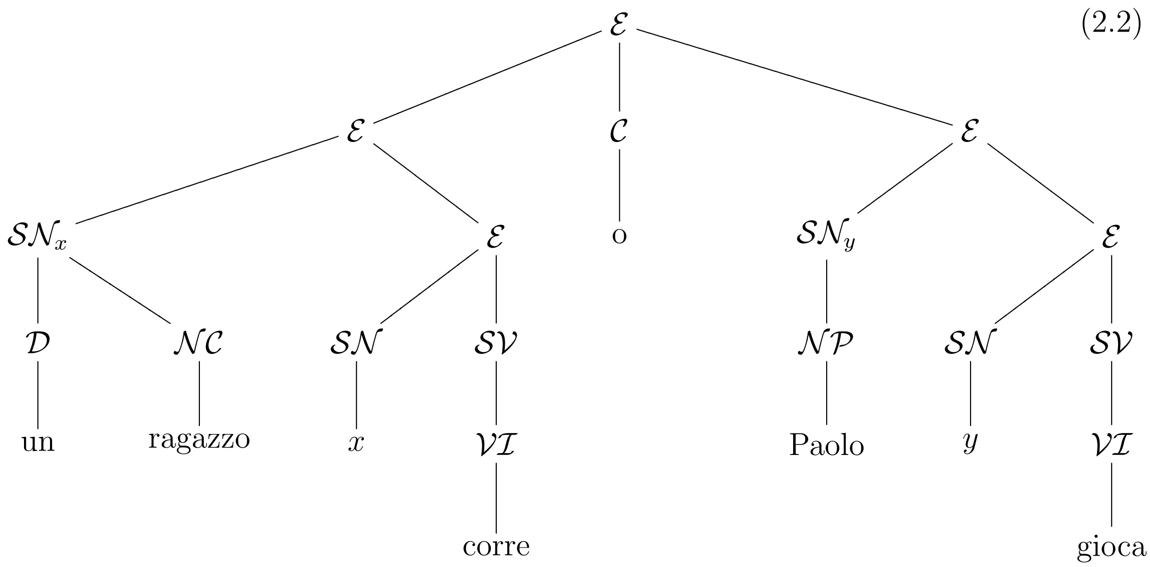
Diciamo che un albero $\mathcal{T}$ prodotto da $\mathcal{G}_l$ è una *forma logica* di un albero $\mathcal{T}'$ prodotto da $\mathcal{G}$ qualora valga $\mathcal{T} \overset{*}{\Longrightarrow} \mathcal{T}'$. In tal caso diremo che $\mathcal{T}$ è un *sollevamento* di $\mathcal{T}'$. Ad esempio è chiaro che 1.1) e 1.2) sono entrambi sollevamenti di (1).

Questa definizione dovrebbe essere chiara, val la pena notare però che due forme logiche di uno stesso albero di $\mathcal{G}$ possono in realtà non corrispondere a due diverse letture di $\mathcal{G}$ empiricamente accettabili. Ad esempio i due alberi



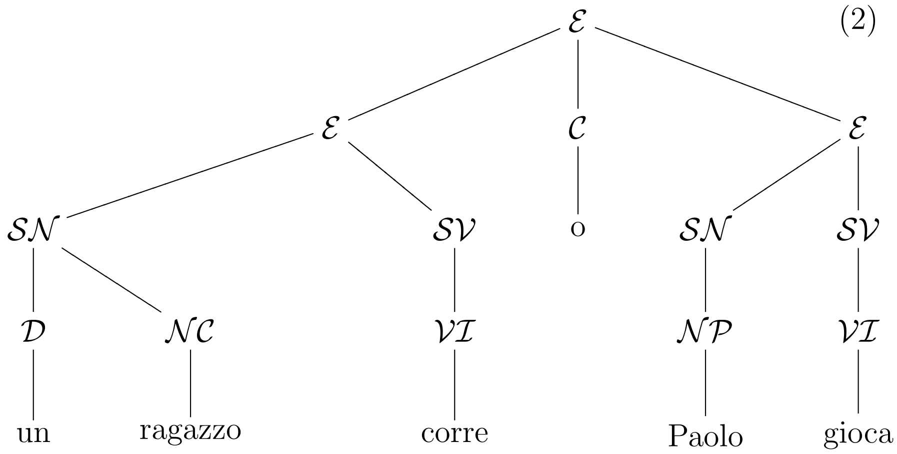
(2.1)

e



(2.2)

si proiettano entrambi nel seguente albero di $\mathcal{G}$



(2)

Secondo le regole di traduzione che daremo, (2.1) viene associato a

2.1) $\exists x(\text{ragazzo}(x) \wedge (\text{corre}(x) \vee \text{gioca}(\text{Paolo})))$

mentre (2.2) viene associato a

2.2) $\exists x(\text{ragazzo}(x) \wedge \text{corre}(x)) \vee \text{gioca}(\text{Paolo})$

Qui 2.1) sembra essere *improbabile* come lettura della frase

(2) *Un ragazzo corre o Paolo gioca*

prodotta da $\mathcal{G}$ come nell'albero (2). Il sollevamento del $\mathcal{SN}$ "un ragazzo" sopra il connettivo "o" sembra non essere accettabile (anche se vedremo che sollevamenti sopra le congiunzioni–connettivo sono essenziali in altri contesti per spiegare la coreferenzialità dei pronomi; tuttavia anche in tali contesti *non sarà lecito estrarre un costituente da uno solo dei membri di una struttura coordinata*).

Inoltre il sollevamento dei $\mathcal{SN}$ che sono nomi propri può essere trasformato nel sollevamento di altri $\mathcal{SN}$, producendo forme logiche differenti che tuttavia verranno tradotte nello stesso modo (se sostituiamo "il Milan" a "una squadra" in (1), la frase non è più ambigua, (1.1) e (1.2) restano alberi differenti, ma il loro significato è lo stesso).

Questa discussione vuol semplicemente rimarcare il fatto che la nostra trattazione è alquanto semplificatoria e che una presentazione rigorosa richiederebbe di imporre *vincoli* sulle trasformazioni di proiezione e sollevamento.

Diamo ora le regole formali di interpretazione per $\mathcal{G}_l$.

Regole formali di interpretazione per $\mathcal{G}_l$

A) se α è un simbolo terminale

1. di categoria "determinante" (ogni, qualche, un, il) oppure "connettivo" (e, o) allora il significato è quello fissato in precedenza
2. altrimenti $[\![\alpha]\!] = \underset{\sim}{\alpha}$ è fissato dal contesto

0)$[\![\ [_{\mathcal{E}}\ \mathcal{SN}_x\ \ \mathcal{E}]\ ]\!] = [\![\mathcal{SN}_x]\!](\{\lambda x|\ [\![\mathcal{E}]\!]\})$

1) $[\![\ [_{\mathcal{E}}\ \mathcal{SN}\ \ \mathcal{SV}]\ ]\!] = [\![\mathcal{SV}]\!]([\![\mathcal{SN}]\!])$

2)$[\![\ [_{\mathcal{E}}\ \mathcal{E}_1\ \ \mathcal{C}\ \ \mathcal{E}_2]\ ]\!] = [\![\mathcal{C}]\!]([\![\mathcal{E}_1]\!], [\![\mathcal{E}_2]\!])$

3) $[\![\ [_{\mathcal{SV}}\ \mathcal{VI}]\ ]\!] = [\![\mathcal{VI}]\!]$

4) $[\![\ [_{\mathcal{SV}}\ \mathcal{VT}\ \ \mathcal{SN}]\ ]\!] = [\![\mathcal{VT}]\!]([\![\mathcal{SN}]\!])$

5) $[\![\ [_{\mathcal{SV}}\ \mathcal{VD}\ \ \mathcal{SN}_1\ \text{a}\ \mathcal{SN}_2]\ ]\!] = ([\![\mathcal{VD}]\!]([\![\mathcal{SN}_2]\!]))([\![\mathcal{SN}]\!]_1)$

6) $[\![\ [_{\mathcal{SN}}\ x]\ ]\!] = x$ per ogni variabile x

7) $[\![\ [_{\mathcal{C}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda t_1 \lambda t_2 \mid [\![\alpha]\!]\}$ (ossia $\{\lambda t_1 \mid \{\lambda t_2 \mid [\![\alpha]\!]\}\}$)

8) $[\![\ [_{\mathcal{VI}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda x \mid [\![\alpha]\!]\}$

9) $[\![\ [_{\mathcal{VT}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda y \lambda x \mid [\![\alpha]\!]\}$

10) $[\![\ [_{\mathcal{VD}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda z \lambda y \lambda x \mid [\![\alpha]\!]\}$

11) $[\![\ [_{\mathcal{NP}}\ \alpha]\ ]\!] = [\![\alpha]\!]$

12) $[\![\ [_{\mathcal{SN}_x}\ \mathcal{D}\ \ \mathcal{NC}]\ ]\!] = [\![\mathcal{D}]\!]([\![\mathcal{NC}]\!])$

13) $[\![\ [_{\mathcal{NC}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda x|\ [\![\alpha]\!]\}$

14) $[\![\ [_{\mathcal{D}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda \mathcal{P} \lambda \mathcal{Q} \mid [\![\alpha]\!]\}$

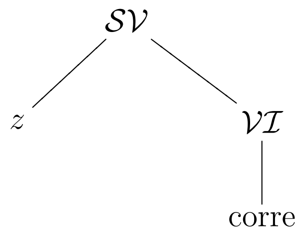
15) $[\![\ [_{\mathcal{SN}_x} \mathcal{NP}]\ ]\!] = \{\lambda \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}([\![\mathcal{NP}]\!])\}$

Figura 5: Interpretazione di $\mathcal{G}_l$

Per uniformità preferiamo usare sempre la λ-conversione (piuttosto che la sostituzione). Cosí, ad esempio,

$$\begin{array}{c} \mathcal{VI} \\ | \\ \text{corre} \end{array}$$

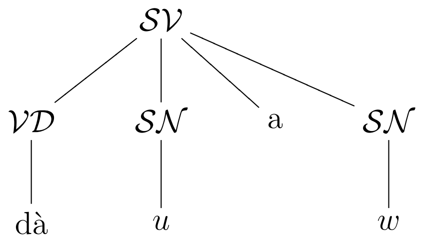
sarà valutato con $\{\lambda x|\ \underset{\sim}{\text{corre}}(x)\}$ e



darà origine a $\{\lambda x|\ \underset{\sim}{\text{corre}}(x)\}(z)$ che si λ-converte in $\underset{\sim}{\text{corre}}(z)$. Procederemo in questo modo per tutte le categorie, onde usare *sempre* la λ-conversione.
Nella 5), $[\![\mathcal{VD}]\!]$ è del tipo (*cfr.* per esempio la 10) oltre)

$$\{\lambda z \lambda y \lambda x \mid \underset{\sim}{\text{dà}}\ (x, y, z)\},$$

quindi la 5) nel caso

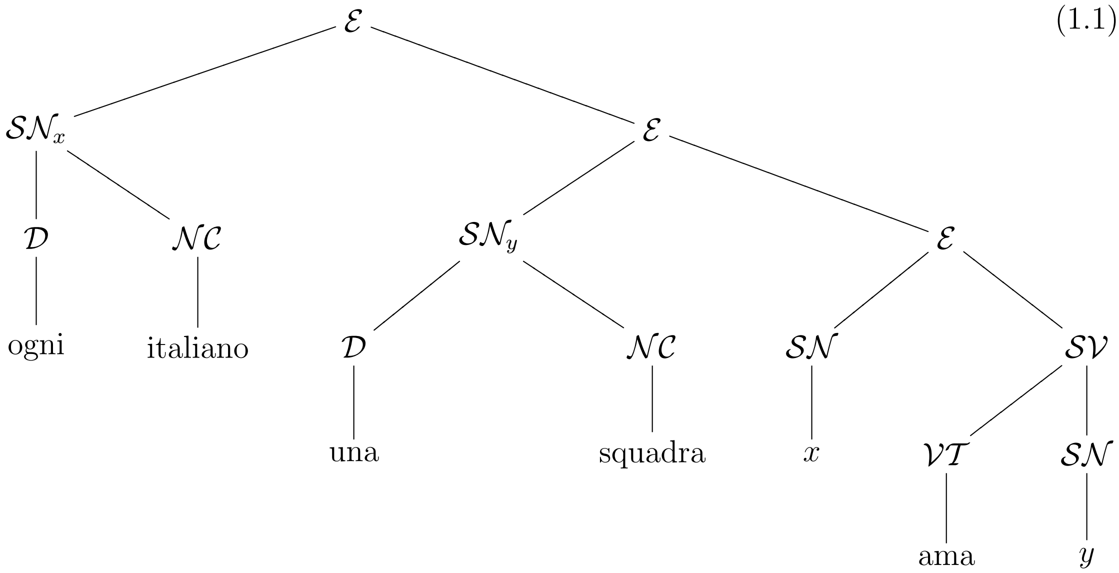


produce (applicando due λ-conversioni)

$$\{\lambda x \mid \underset{\sim}{\text{dà}}\ (x, u, w)\}.$$

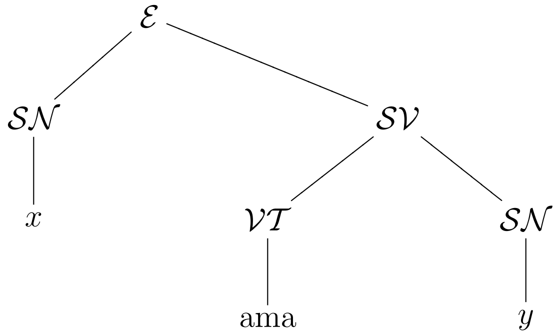
Si noti che, poiché $[\![\mathcal{SN}_x]\!]$ è del tipo $\{\lambda \mathcal{Q}|\ \ldots\}$, la regola 0) produce, per λ-conversione, semplicemente la sostituzione di $[\![\mathcal{E}]\!]$ a $\mathcal{Q}$. Un'analoga osservazione vale per le regole successive. La regola 12) produce per λ-conversione la sostituzione di $[\![\mathcal{NC}]\!]$ a $\mathcal{P}$ in $[\![\mathcal{D}]\!]$. Notiamo infine nella 0) il λ-operatore è applicato alla variabile x che è *proprio quella quantificata da* $\mathcal{SN}_x$.

Proviamo a valutare gli alberi (1.1) e (1.2) con questi nuovi strumenti.

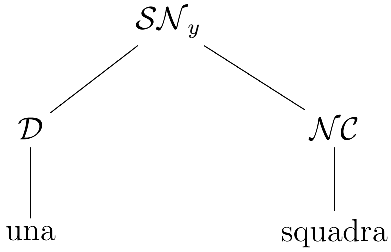


(1.1)

La valutazione di



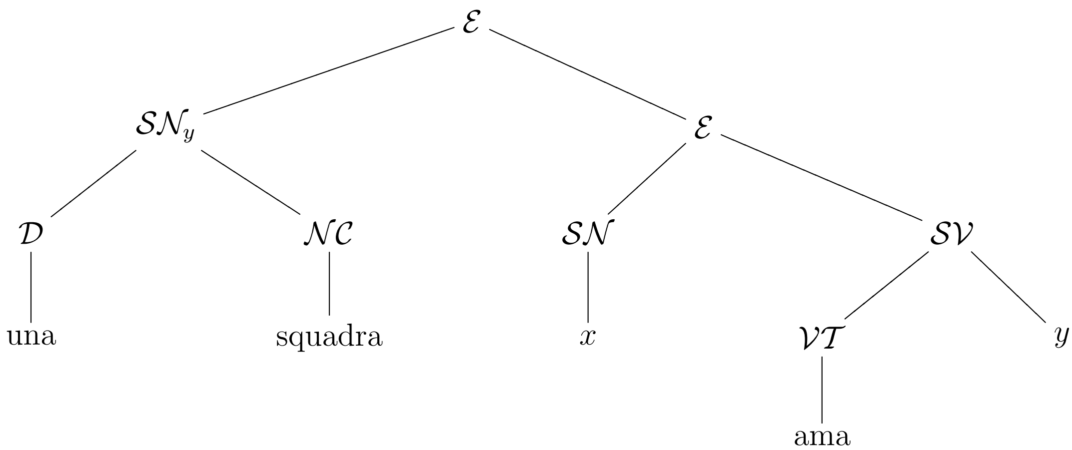
è $\underset{\sim}{\text{ama}}(x, y)$. Inoltre



si valuta in

$$\{\lambda\mathcal{P}\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset\}(\{\lambda x \mid \underset{\sim}{\text{squadra}}(x)\}) = \{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \underset{\sim}{\text{squadra}}(x)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset\}$$

per cui



viene valutato con

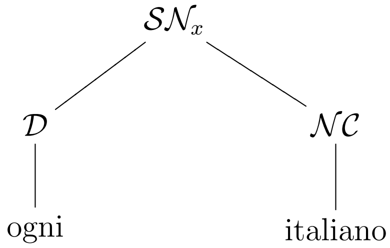
$$\{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda y \mid \underset{\sim}{\text{squadra}}(y)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset\}(\{\lambda y \mid \underset{\sim}{\text{ama}}(x, y)\})$$

$$= \{\lambda y \mid \underset{\sim}{\text{squadra}}(y)\} \cap \{\lambda y \mid \underset{\sim}{\text{ama}}(x, y)\} \neq \emptyset$$ [6]

[6] Abbiamo operato un cambio di variabile vincolata: $\{\lambda x \mid \underset{\sim}{\text{squadra}}(x)\} = \{\lambda y \mid \underset{\sim}{\text{squadra}}(y)\}$ per facilitare la lettura.

$= \exists y(\text{squadra}(y) \wedge \text{ama}(x, y))$, per λ-conversione.

Poiché



dà

$\{\lambda \mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{italiano}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}\}$

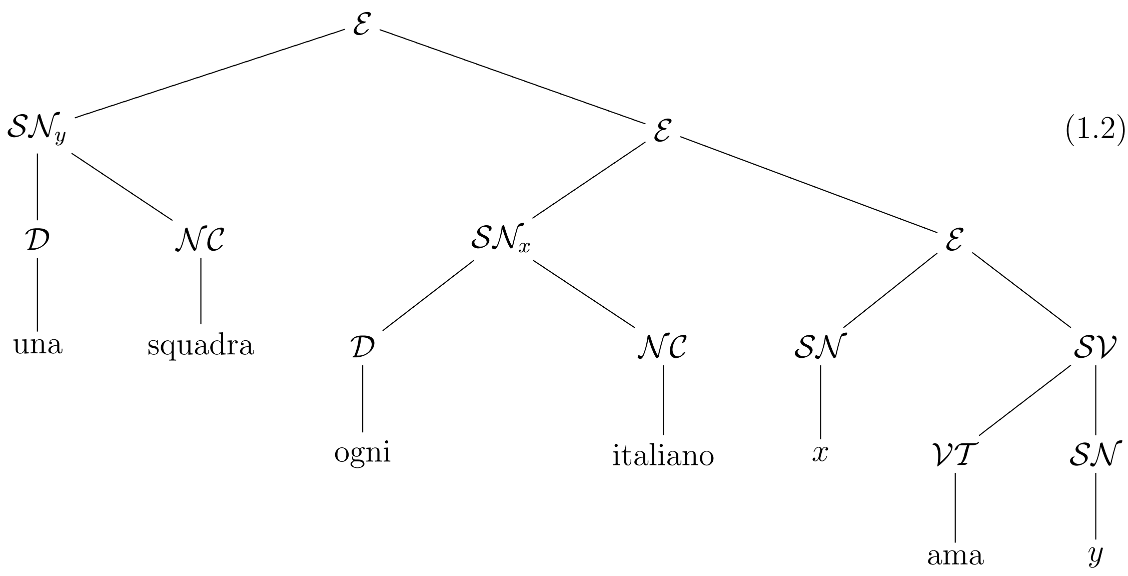
abbiamo che (1.1) viene valutato su

$\{\lambda x \mid \text{italiano}(x)\} \subseteq \{\lambda x \mid \exists y(\text{squadra}(y) \wedge \text{ama}(x, y))\}$

$= \forall x(\text{italiano}(x) \rightarrow \exists y(\text{squadra}(y) \wedge \text{ama}(x, y)))$

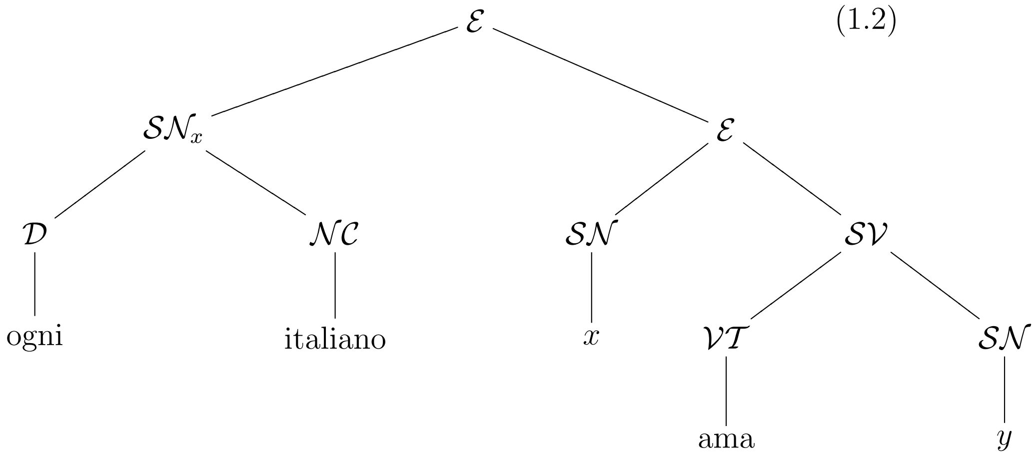
che è proprio la 1.1) di pag. **??**.

Valutiamo ora l'albero (1.2)



(1.2)

Abbiamo che



(1.2)

si valuta in

$$\{\lambda x \mid \mathrm{ita\utilde{li}ano}(x)\} \subseteq \{\lambda x \mid \mathrm{a\utilde{m}a}(x,y)\}$$

$$= \forall x(\mathrm{ita\utilde{li}ano}(x) \to \mathrm{a\utilde{m}a}(x,y))$$

per cui (1.2) viene valutato in

$$\{\lambda \mathcal{Q} \mid \{\lambda y \mid \mathrm{squ\utilde{a}dra}(y)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset\}(\{\lambda y \mid \forall x(\mathrm{ita\utilde{li}ano}(x) \to \mathrm{a\utilde{m}a}(x,y))\})$$

$$= \{\lambda y \mid \mathrm{squ\utilde{a}dra}(y)\} \cap \{\lambda y \mid \forall x(\mathrm{ita\utilde{li}ano}(x) \to \mathrm{a\utilde{m}a}(x,y))\} \neq \emptyset$$ [7]

$$= \exists y(\mathrm{squ\utilde{a}dra}(y) \wedge \forall x(\mathrm{ita\utilde{li}ano}(x) \to \mathrm{a\utilde{m}a}(x,y))), \text{ per } \lambda\text{-conversione}$$

che è proprio la 1.2) di pag. **??**.

Va da sè che 1.1) e 1.2) non sono formule del prim'ordine logicamente equivalenti fra loro (il lettore può trovare un controesempio usando i tableaux se vuole convincersene).

Per quanto riguarda il problema della ricerca delle forme logiche corrispondenti ad un albero di $\mathcal{G}$ osserviamo soltanto che è possibile definire un procedimento effettivo che le generi tutte.

Nei paragrafi seguenti cercheremo di *potenziare* $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}_l$. Ogni potenziamento richiede di arricchire sia $\mathcal{G}$ che $\mathcal{G}_l$ e di specificare, in alcuni casi, nuove regole di proiezione/sollevamento. Per semplicità arricchiremo solo $\mathcal{G}_l$ (lasciando implicito l'arricchimento di $\mathcal{G}$) e aggiorneremo però, se necessario, le regole di proiezione/sollevamento.

Ogni arricchimento potrà comportare l'aggiunta di nuove regole per l'interpretazione semantica (da aggiungere a quelle descritte in questo paragrafo).

[7] Abbiamo fatto il solito cambio di variabile vincolata.

3 Pronomi come variabili

I pronomi, nel linguaggio naturale, possono svolgere il ruolo delle variabili libere o vincolate dei linguaggi logici. Ricordiamo che in italiano i pronomi sono declinati per genere, numero e caso, per cui occorrerebbero regole aggiuntive (che trascureremo) che impediscano di generare frasi scorrette come

* *Paolo lei ama.*

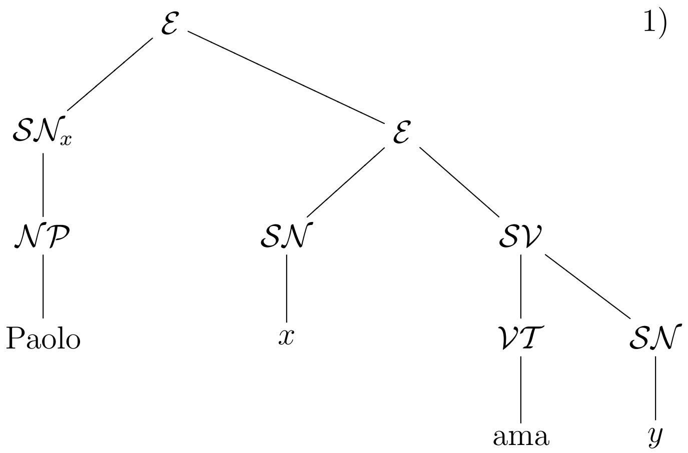
Invece

(1) *Paolo la ama*

è corretta, ma assume significato solo una volta che a “la” sia assegnata una denotazione (che può essere data dal contesto, da un gesto ostensivo del braccio, *ecc.*).

Abbiamo visto che $\mathcal{G}_l$ può generare l'albero

1)



che viene valutato con

$$\{\lambda x|\ (\underset{\sim}{\text{ama}}(x,y)\}(\underset{\sim}{\text{Paolo}}) = \underset{\sim}{\text{ama}}(\underset{\sim}{\text{Paolo}}, y).$$

Se diamo la possibilità alle proiezioni anche di *sostituire variabili libere con pronomi*, 1) si proietta su un albero che genera la frase

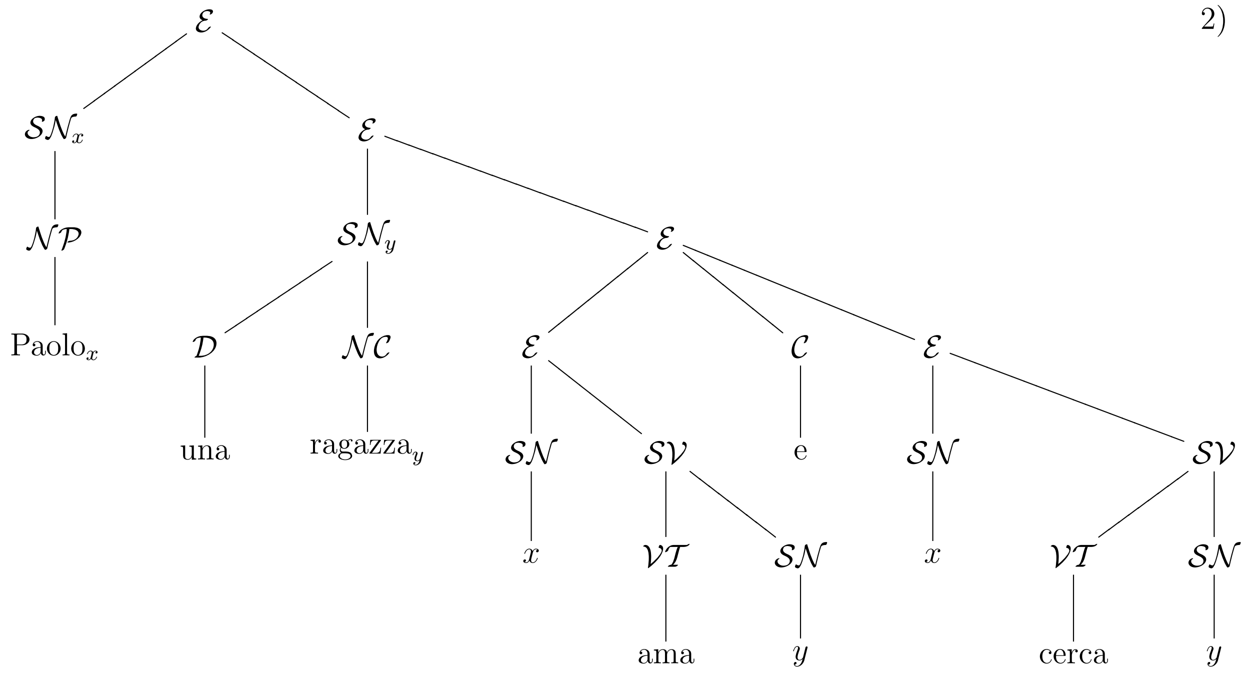
($1'$) *Paolo ama lei*

che differisce da (1) solo per una di quelle trasformazioni superficiali relative alla corretta dislocazione e declinazione dei pronomi che abbiamo deciso di ignorare. In questo modo abbiamo una spiegazione semplice dell'uso deittico dei pronomi.

Più intricato è invece l'uso dei pronomi come variabili vincolate. Si consideri la frase

(2) *Paolo ama una ragazza e (lui) la cerca.*

$\mathcal{G}_l$ genera il seguente albero:[8]



2)

(Per ora non siamo ancora in grado di applicare "e" direttamente ai $\mathcal{SV}$ per cui è necessario in (2) riprendere il soggetto "Paolo" con il pronome coreferenziale "lui"). Questo albero viene valutato correttamente in

$$\exists y(\underset{\sim}{\text{ragazza}}(y) \wedge (\underset{\sim}{\text{ama}}(\underset{\sim}{\text{Paolo}}, y) \wedge \underset{\sim}{\text{cerca}}(\underset{\sim}{\text{Paolo}}, y))).$$

Si tratta solo di ampliare l'insieme delle proiezioni ammissibili in modo da proiettare 2) su un albero che genera proprio (2) (a meno di trasformazioni superficiali legate alla collocazione e declinazione dei pronomi). La precedente definizione di proiezione escludeva la possibilità di sostituire un albero con radice $\mathcal{SN}_x$ a più di una occorrenza di x nell'albero con radice $\mathcal{E}$ alla sua destra. Ora ammettiamo questa possibilità, a patto che *le occorrenze successive alla prima* (nell'ordine da sinistra a destra delle foglie) siano rimpiazzate con un *pronome* coreferenziale (quindi soggetto per esempio a vincoli di concordanza) con il $\mathcal{SN}_x$ che viene dislocato.[9] In questo modo 2) si proietta su un albero che produce (a meno di movimenti superficiali) proprio la (2).

Si noti che il sostituire tutte le occorrenze delle variabili x con il corrispondente $\mathcal{SN}_x$ produce non solo ridondanza ma anche variazioni di significato; se facessimo cosí, da 2) otterremmo per esempio

(3) *Paolo ama una ragazza e Paolo cerca una ragazza.*

[8]Scriviamo Paolo$_x$, ragazza$_y$ per agevolare la lettura; in questo modo non siamo costretti a guardare i nodi $\mathcal{SN}_x, \mathcal{SN}_y$ sopra.

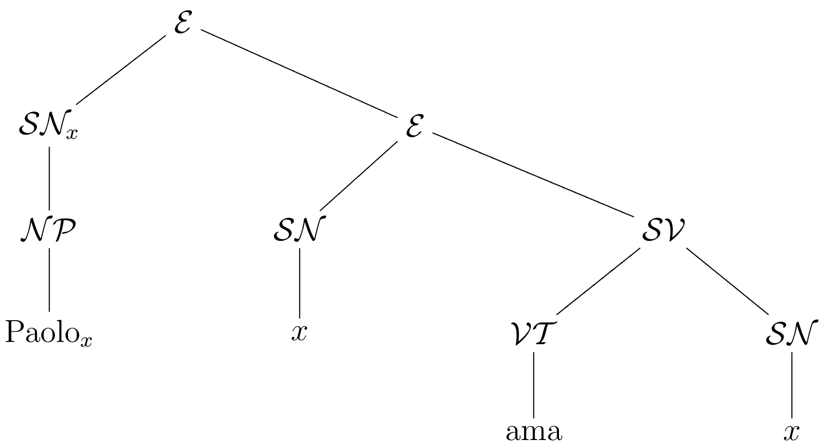
[9]Sarebbe più corretto procedere in questo modo. Tra le varie occorrenze di x ne viene identificata una (detta *traccia* del sintagma nominale sollevato), che di solito in italiano è quella più a sinistra, che viene sostituita con il sintagma nominale mentre le altre vengono rimpiazzate da un pronome. Ci sono casi in cui la traccia non è la prima occorrenza a sinistra, come in "*se la maestra lo vede, Paolo si nasconde.*"

frase che è grammaticalmente corretta, ma che non ha lo stesso senso della (2) (potrebbe voler dire, per esempio, che "*Paolo ama Lucia ma cerca Antonella*"). La (3) può essere ottenuta per proiezione da un albero di $\mathcal{G}_l$ che non è 2).

Osserviamo anche che la grammatica della lingua italiana prevede in certi casi che il pronome coreferenziale al $\mathcal{SN}_x$ sia *riflessivo*:

(4) *Paolo si ama*

è generato dal seguente albero



mediante la proiezione che abbiamo descritto (con la seconda occorrenza di x che viene rimpiazzata da "se stesso"). La (4) viene valutata, secondo le nostre regole, mediante

$\utilde{\text{ama}}(\utilde{\text{Paolo}}, \utilde{\text{Paolo}})$,

in quanto

$$\{\lambda x | \utilde{\text{ama}}(x, x)\}(\utilde{\text{Paolo}}) = \utilde{\text{ama}}(\utilde{\text{Paolo}}, \utilde{\text{Paolo}})$$

per λ-conversione.

Infine segnaliamo che *vincoli* (specifici per ogni determinante) dovrebbero essere posti sulle proiezioni ammissibili. Si considerino le tre frasi:

(5) *Uno studente è venuto e (lui) ha sostenuto l'esame.*

(6*) *Ogni studente è venuto e (lui) ha sostenuto l'esame.*

(7) *Tutti gli studenti sono venuti e (loro) hanno sostenuto l'esame.*

La dubbia grammaticalità di (6*) indica che il sollevamento oltre la congiunzione è interdetto per "ogni" ma consentito per "un" e "tutti".

Segnaliamo anche che il sollevamento da uno solo dei congiunti/disgiunti non sembra essere consentito, nel senso che non è possibile sollevare un sintagma nominale sopra una disgiunzione/congiunzione se il sintagma nominale non vincola una variabile in entrambi i disgiunti/congiunti.

4 Operatori cross-categoriali

Vogliamo consentire di applicare la congiunzione e la disgiunzione direttamente ai sintagmi verbali (e, virtualmente, ad ogni categoria) onde spiegare l'omissione dei pronomi "lui" e "loro" in (5) e (7) del paragrafo precedente. Semanticamente questo fatto è chiaro: dal fatto che Ω è dotato delle operazioni $\wedge, \vee$ segue che anche gli oggetti del tipo Ω^X sono dotati delle stesse operazioni. Possiamo definire

$$\wedge : \Omega^X \times \Omega^X \to \Omega^X$$

nel modo seguente. Abbiamo la funzione "valutazione"

$$\mathrm{val} : X \times \Omega^X \to \Omega$$

che a $x \in X$ e $\varphi \in \Omega^X$ associa $\varphi(x) \in \Omega$. Quindi possiamo definire

$$X \times \Omega^X \times \Omega^X \to \Omega \times \Omega$$

mediante[10]

$$\langle x, \varphi, \psi \rangle \longmapsto \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle.$$

Se poi componiamo con

$$\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$$

otteniamo la funzione

$$X \times \Omega^X \times \Omega^X \to \Omega$$

che associa $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ all'argomento $\langle x, \varphi, \psi \rangle$; λ-astraendo, otteniamo proprio

$$\wedge : \Omega^X \times \Omega^X \to \Omega^X$$

data da

$$\varphi \wedge \psi = \{\lambda x |\ \varphi(x) \wedge \psi(x)\}.$$

Analogamente possiamo definire

$$\varphi \vee \psi = \{\lambda x |\ \varphi(x) \vee \psi(x)\}.^{11}$$

Queste considerazioni ci suggeriscono di ampliare $\mathcal{G}_l$ mettendo al posto della 3) di Figura 4 un gruppo di regole molto più potenti (Figura 6)

[10] Formalmente la definizione è data dalla seguente composizione

$$X \times \Omega^X \times \Omega^X \xrightarrow{\langle 1_X, 1_X \rangle \times 1_{\Omega^X} \times 1_{\Omega^X}} X \times X \times \Omega^X \times \Omega^X \xrightarrow{\simeq} X \times \Omega^X \times X \times \Omega^X \xrightarrow{\mathrm{val} \times \mathrm{val}} \Omega \times \Omega.$$

[11] Per effetto delle definizioni poste, abbiamo ad esempio

$$\{\lambda x |\ \delta(x)\} \wedge \{\lambda x |\ \gamma(x)\} = \{\lambda y | \{\lambda x |\ \delta(x)\}(y) \wedge \{\lambda x |\ \gamma(x)\}(y)\} = \{\lambda y |\ \delta(y) \wedge \gamma(y)\}$$

per λ-conversione.

2.1) $\mathcal{E} \to \ \mathcal{E}\ \ \mathcal{C}\ \ \mathcal{E}$

2.2) $\mathcal{SV} \to \ \mathcal{SV}\,\mathcal{C}\ \ \mathcal{SV}$

2.3) $\mathcal{SN}_x \to \ \mathcal{SN}_x\ \ \mathcal{C}\ \ \mathcal{SN}_x$ per ogni variabile x

2.4) $\mathcal{D} \to \ \mathcal{D}\ \ \mathcal{C}\ \ \mathcal{D}$

Figura 6: Regole per la congiunzione e la disgiunzione

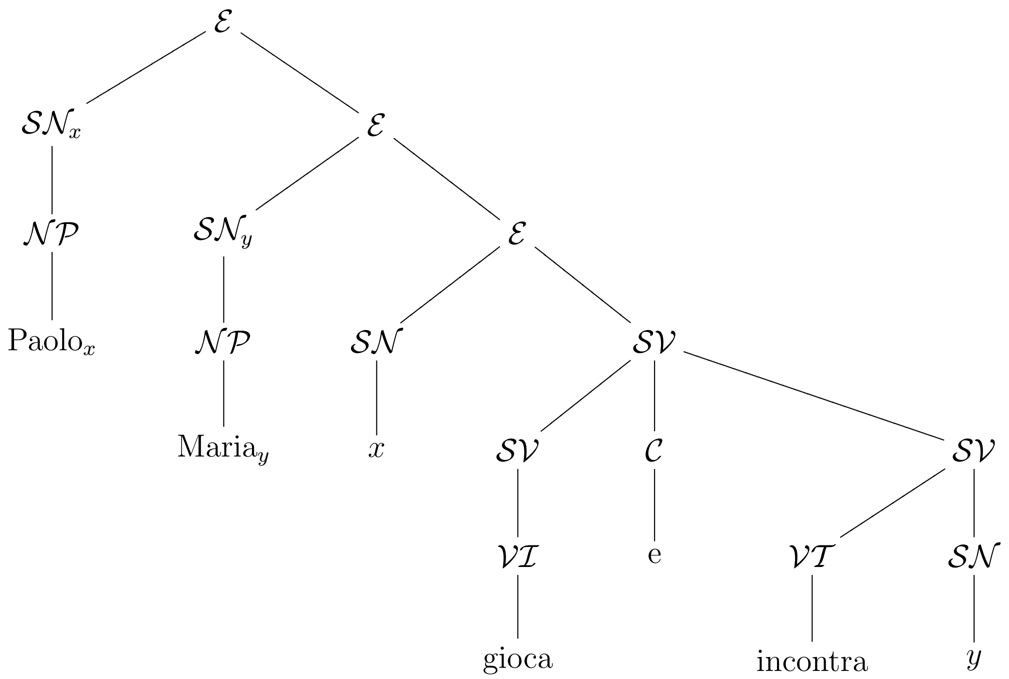
Va però precisato che occorrerebbe un po' di cautela: "ogni ragazzo e qualche ragazza" è accettabile come $\mathcal{SN}_x$, mentre "un e ogni" sembra proprio scorretto come $\mathcal{D}$ (benché "tutti o nessuno" sia pienamente in uso come $\mathcal{D}$ disgiunto).

Le regole semantiche di Figura 5 non richiedono altra modifica se non l'osservazione che "e", "o" sono interpretate su $\wedge, \vee$ *del tipo opportuno* (potremo avere $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$, $\wedge : \Omega^D \times \Omega^D \to \Omega^D$, $\wedge : \Omega^{\Omega^D} \times \Omega^{\Omega^D} \to \Omega^{\Omega^D}$, *ecc.*).

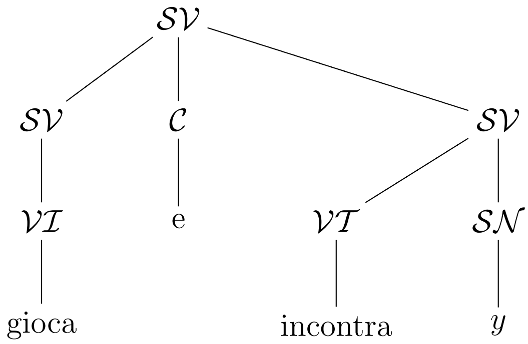
Se volessimo essere più precisi, dovremmo mettere un indice $\mathcal{C}_{\mathcal{E}}, \mathcal{C}_{\mathcal{SV}}, \ldots$ a $\mathcal{C}$ in 2.1)–2.4) e modificare le regole di interpretazione semantica "tipandole" in modo che ogni volta sia usata la $\wedge$ del tipo giusto, ma ometteremo di farlo per semplicità.

Vediamo qualche esempio.

(1) *Paolo gioca e incontra Maria*



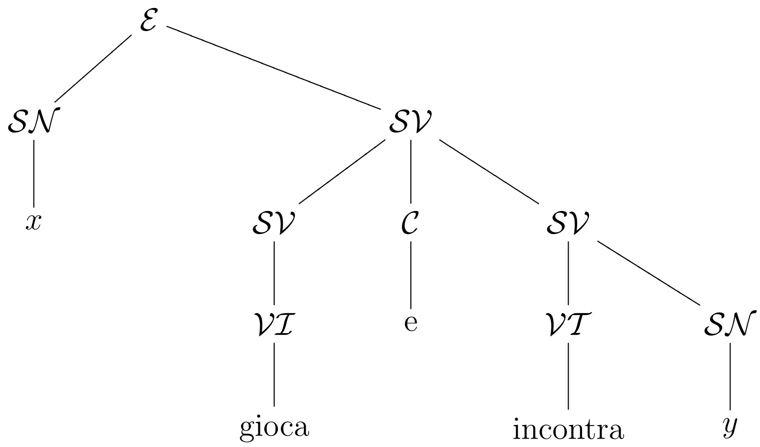
Dobbiamo usare le regole della Figura 5 a pag. **??**



si valuta in

$\{\lambda x \mid \utilde{\text{gioca}}(x)\} \wedge \{\lambda y \lambda x \mid \utilde{\text{incontra}}(x, y)\}(y)$

$= \{\lambda x \mid \utilde{\text{gioca}}(x) \wedge \utilde{\text{incontra}}(x, y)\}.$



si valuta in

$\{\lambda x \mid \utilde{\text{gioca}}(x) \wedge \utilde{\text{incontra}}(x, y)\}(x)$

$= \utilde{\text{gioca}}(x) \wedge \utilde{\text{incontra}}(x, y).$

La (1) viene ora valutata con

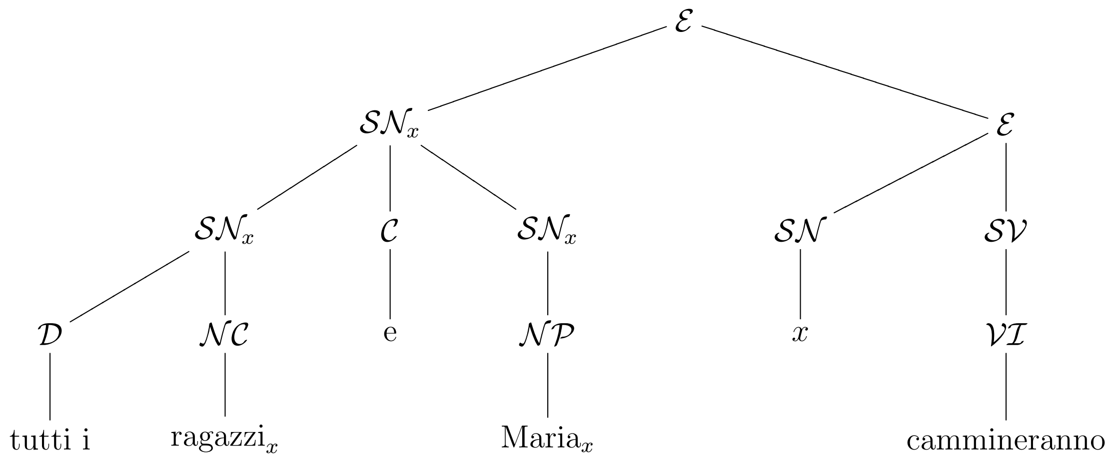
$\{\lambda \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}(\utilde{\text{Paolo}})\}(\{\lambda x \mid \{\lambda \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}(\utilde{\text{Maria}}\}(\{\lambda y \mid \utilde{\text{gioca}}(x) \wedge \utilde{\text{incontra}}(x, y)\}))$

$= \{\lambda \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}(\utilde{\text{Paolo}})\}(\{\lambda x \mid \utilde{\text{gioca}}(x) \wedge \utilde{\text{incontra}}(x, \utilde{\text{Maria}})\})$

$= \utilde{\text{gioca}}(\utilde{\text{Paolo}}) \wedge \utilde{\text{incontra}}(\utilde{\text{Paolo}}, \utilde{\text{Maria}}).$

(2) *Maria e tutti i ragazzi cammineranno*

Qui abbiamo una congiunzione di $\mathcal{SN}$ sollevati (trascuriamo il fatto che il verbo sia espresso al tempo futuro).



Abbiamo

$$[\![\text{tutti i ragazzi}]\!] = \{\lambda \mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{ragazzo}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}\}$$

$$[\![\text{Maria}]\!] = \{\lambda \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}(\text{Maria})\}.$$

Quindi

$$[\![\text{tutti i ragazzi e Maria}]\!] = \{\lambda \mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{ragazzo}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}\} \wedge \{\lambda \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}(\text{Maria})\}$$

$$=\{\lambda \mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{ragazzo}(x)\} \subseteq \mathcal{Q} \wedge \mathcal{Q}(\text{Maria})\}$$

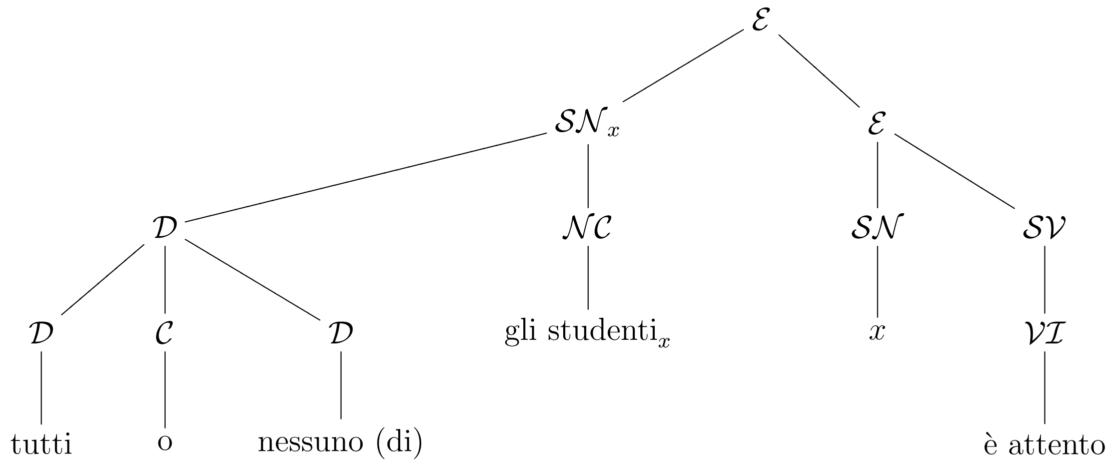
La (2) quindi viene valutata con:

$$\{\lambda \mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{ragazzo}(x)\} \subseteq \mathcal{Q} \wedge \mathcal{Q}(\text{Maria})\}(\{\lambda x \mid \text{camminerà}(x)\})$$

$$= \{\lambda x \mid \text{ragazzo}(x)\} \subseteq \{\lambda x \mid \text{camminerà}(x)\} \wedge \text{camminerà}(\text{Maria})$$

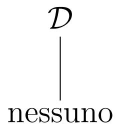
$$= \forall x(\text{ragazzo}(x) \to \text{camminerà}(x)) \wedge \text{camminerà}(\text{Maria}).$$

(3) *Tutti o nessuno degli studenti è attento*

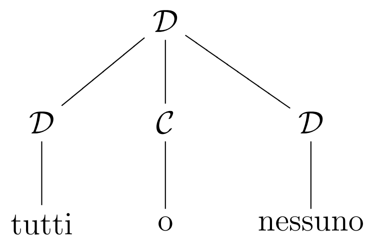


Qui abbiamo una disgiunzione di determinanti. Poiché $[\![\text{tutti}]\!]$ è $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ e $[\![\text{nessuno}]\!]$ è $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ abbiamo che

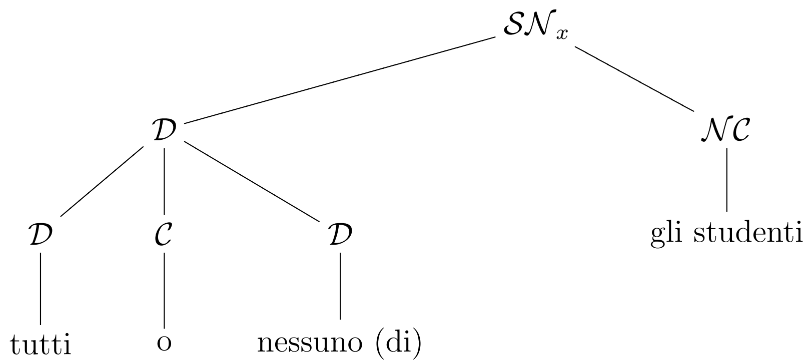
si valuta in $\{\lambda\mathcal{P}\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}\}$ e



in $\{\lambda\mathcal{P}\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset\}$ (vedi la (14) di pag. **??**). Perciò la valutazione di



è $\{\lambda\mathcal{P}\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}\} \vee \{\lambda\mathcal{P}\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset\} = \{\lambda\mathcal{P}\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \vee \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset\}$. Inoltre



si valuta in

$$\{\lambda\mathcal{P}\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q} \vee \mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset\}(\{\lambda x \mid \text{stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}(x)\})$$

$$= \{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}(x)\} \subseteq \mathcal{Q} \vee \{\lambda x \mid \text{stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}\}(x) \cap \mathcal{Q} = \emptyset\}$$

quindi (3) viene valutata con

$$\{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}(x)\} \subseteq \mathcal{Q} \vee \{\lambda x \mid \text{stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}(x) \cap \mathcal{Q} = \emptyset\}(\{\lambda x \mid \text{att}\underset{\smile}{\text{en}}\text{to}(x)\})$$

$$= \{\lambda x | \text{ stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}(x)\} \subseteq \{\lambda x | \text{ att}\underset{\smile}{\text{en}}\text{to}(x)\} \vee \{\lambda x | \text{ stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}(x)\} \cap \{\lambda x | \text{ att}\underset{\smile}{\text{en}}\text{to}(x)\} = \emptyset$$

$$= \forall x(\text{stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}(x) \to \text{att}\underset{\smile}{\text{en}}\text{to}(x)) \vee \neg\exists x(\text{stu}\underset{\smile}{\text{de}}\text{nte}(x) \wedge \text{att}\underset{\smile}{\text{en}}\text{to}(x)).$$[12]

Si noti che la nostra analisi è già in grado di scoprire (mediante l'uso per esempio dei tableaux per la logica del prim'ordine) che (3) e (4) hanno come conseguenza logica (5), dove

(4) *Maria è attenta*

(5) *Paolo è attento*

posto che l'informazione che Paolo e Maria sono studenti sia fornita dal contesto (ossia (3′) *Paolo è uno studente* e (3″) *Maria è una studentessa* devono essere aggiunti a (3) e (4) per ricavare (5) come conseguenza).

Affrontiamo ora il problema della *negazione*. Dal punto di vista strettamente semantico, la situazione della negazione è analoga a quella degli altri connettivi. Abbiamo un'operazione

$$\neg : \Omega \to \Omega$$

definita da

$\neg(1) = 0$

$\neg(0) = 1$

che si trasporta, per ogni insieme X, ad un'operazione

$$\neg : \Omega^X \to \Omega^X$$

data da $\neg\varphi = \{\lambda x \mid \neg\varphi(x)\}$ mediante lo stesso procedimento utilizzato per $\wedge$ e $\vee$.

Possiamo allora aggiungere alle regole di $\mathcal{G}_l$ una nuova regola che consenta di usare la negazione

17) $\mathcal{E} \to \ \mathcal{NEG}\ \ \mathcal{E}$

[12] $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ è la negazione di $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ perciò è $\neg\exists x(\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x))$.

il cui sorrispondente semantico è la regola $[\![\ [_{\mathcal{E}}\mathcal{NEG}\ \ \mathcal{E}]\ ]\!] = \neg[\![\mathcal{E}]\!]$.[13]

Il problema vero è come definire le regole di proiezione/sollevamento che realizzino $\mathcal{NEG}$ nella lingua italiana. Usualmente $\mathcal{NEG}$ viene realizzato con "non" in opportuna posizione (tuttavia $\mathcal{NEG}\ \ \mathcal{E}$ può essere realizzato anche con "non si dà il caso che $\mathcal{E}$ o con "non è vero che $\mathcal{E}$).

Trascurando e lasciando implicite tali regole, esaminiamo alcuni esempi da cui risulterà chiaro che *la negazione è soggetta a distinzioni di ambito e ambiguità* analoghe a quelle rilevate per i quantificatori (per cui la stessa frase può avere più forme logiche non equivalenti con $\mathcal{NEG}$ sollevato in posizioni diverse).

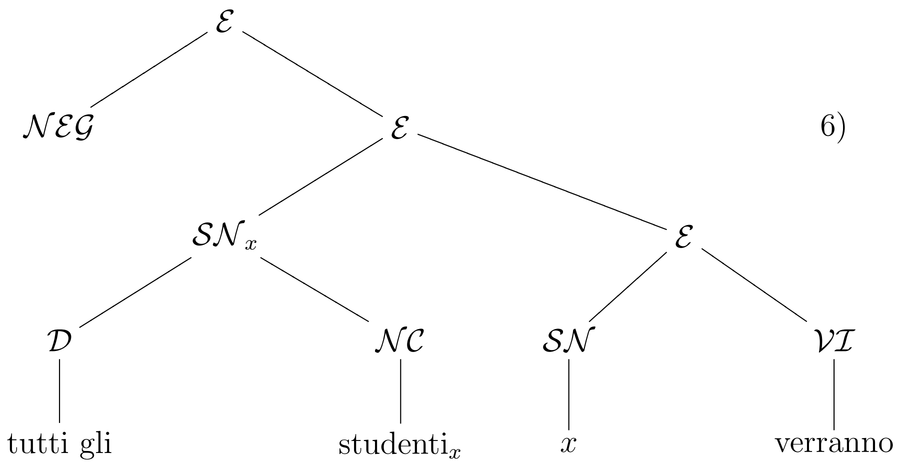
Esaminiamo le frasi

(6) *Non è vero che tutti gli studenti verranno.*

(7) *Tutti gli studenti non verranno.*

La (7) è ambigua perché non è chiaro se l'ambito della negazione sia o meno più ampio di quello del $\mathcal{SN}$ quantificato.

Facciamo le dovute analisi, cominciando da (6):



6)

L'analisi semantica dà

$\neg\{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \mathrm{stu}\underset{\smile}{\mathrm{de}}\mathrm{nte}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}\}(\{\lambda x \mid \mathrm{ve}\underset{\smile}{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)\})$

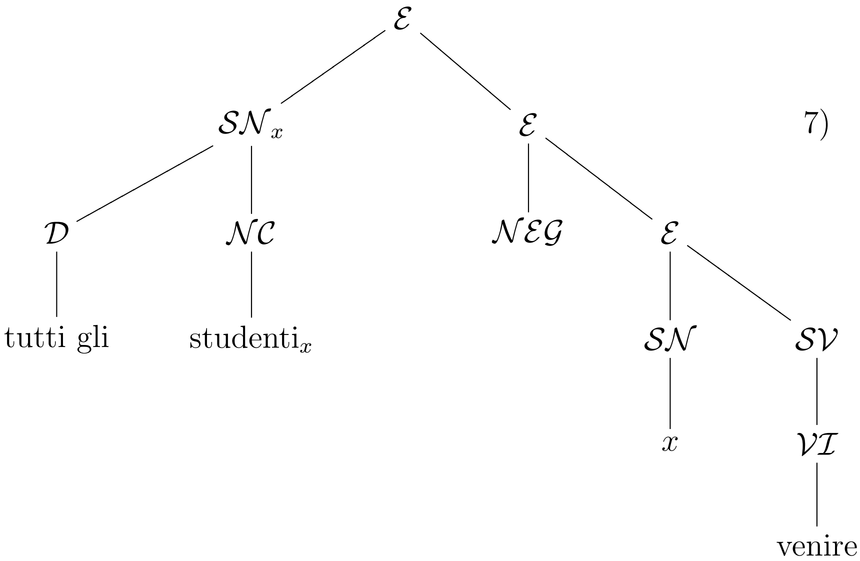
$= \neg\{\lambda x \mid \mathrm{stu}\underset{\smile}{\mathrm{de}}\mathrm{nte}(x)\} \subseteq \{\lambda x \mid \mathrm{ve}\underset{\smile}{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)\}$

$= \neg(\forall x(\mathrm{stu}\underset{\smile}{\mathrm{de}}\mathrm{nte}(x) \to \mathrm{ve}\underset{\smile}{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)))$.

Veniamo ora al caso problematico (7). Qui la negazione può avere ambito ampio o meno sul $\mathcal{SN}$ quantificato "tutti gli studenti". Nel caso dell'ambito ampio, (7) ha la stessa forma logica che abbiamo visto per (6) (è solo il meccanismo di proiezione sulla struttura superficiale che è differente). Nel caso che sia il $\mathcal{SN}$ "tutti gli studenti" ad avere

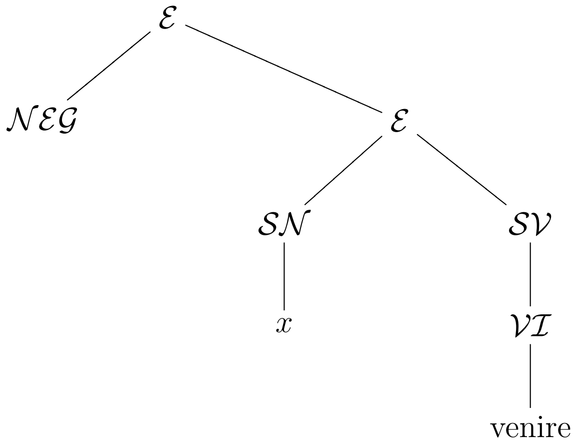
[13] La negazione può avere un limitato uso cross-categoriale.

ambito ampio abbiamo la seguente forma logica alternativa (che, analizzata, produrrà una formula del prim'ordine *non equivalente* a quella trovata per (6)):



7)

Sappiamo che $[\![\text{tutti gli studenti}]\!] = \{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \mathrm{stu}\utilde{\mathrm{de}}\mathrm{nte}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}\}$ e, d'altra parte,



si valuta in $\neg\{\lambda x \mid \mathrm{ve}\utilde{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)\}(x) = \neg\mathrm{ve}\utilde{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)\}(x)$. Quindi 7) dà origine a

$$\{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \mathrm{stu}\utilde{\mathrm{de}}\mathrm{nte}(x)\} \subseteq \mathcal{Q}\}(\{\lambda x \mid \neg\mathrm{ve}\utilde{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)\})$$

$$= \{\lambda x \mid \mathrm{stu}\utilde{\mathrm{de}}\mathrm{nte}(x)\} \subseteq \{\lambda x \mid \neg\mathrm{ve}\utilde{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)\}$$

$$= \forall x(\mathrm{stu}\utilde{\mathrm{de}}\mathrm{nte}(x) \to \neg\mathrm{ve}\utilde{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)) \qquad (7.1)$$

La (7.1) è diversa da

$$\neg\forall x(\mathrm{stu}\utilde{\mathrm{de}}\mathrm{nte}(x) \to \mathrm{ve}\utilde{\mathrm{ni}}\mathrm{re}(x)) \qquad (7.2)$$

(7.2) stabilisce che almeno uno studente non verrà, mentre (7.1) afferma che la totalità degli studenti sarà assente. La (7) sembra davvero avere una lettura ambigua oscillante fra (7.1) e (7.2).

5 Frasi relative

Vedremo in questo paragrafo come sia possibile, mediante il λ-operatore, dar conto delle condizioni di verità di frasi che utilizzano pronomi relativi. Il pronome relativo può essere utilizzato per modificare un $\mathcal{NC}$ ottenendo un $\mathcal{NC}$ più complesso. Aggiungiamo la regola

18. $\mathcal{NC} \to \mathcal{NC}$ che$_x$ $\mathcal{E}$ (per ogni variabile x)

e la proiezione che rimpiazza le occorrenze di x in $\mathcal{E}$ con il pronome relativo

che |il quale | cui

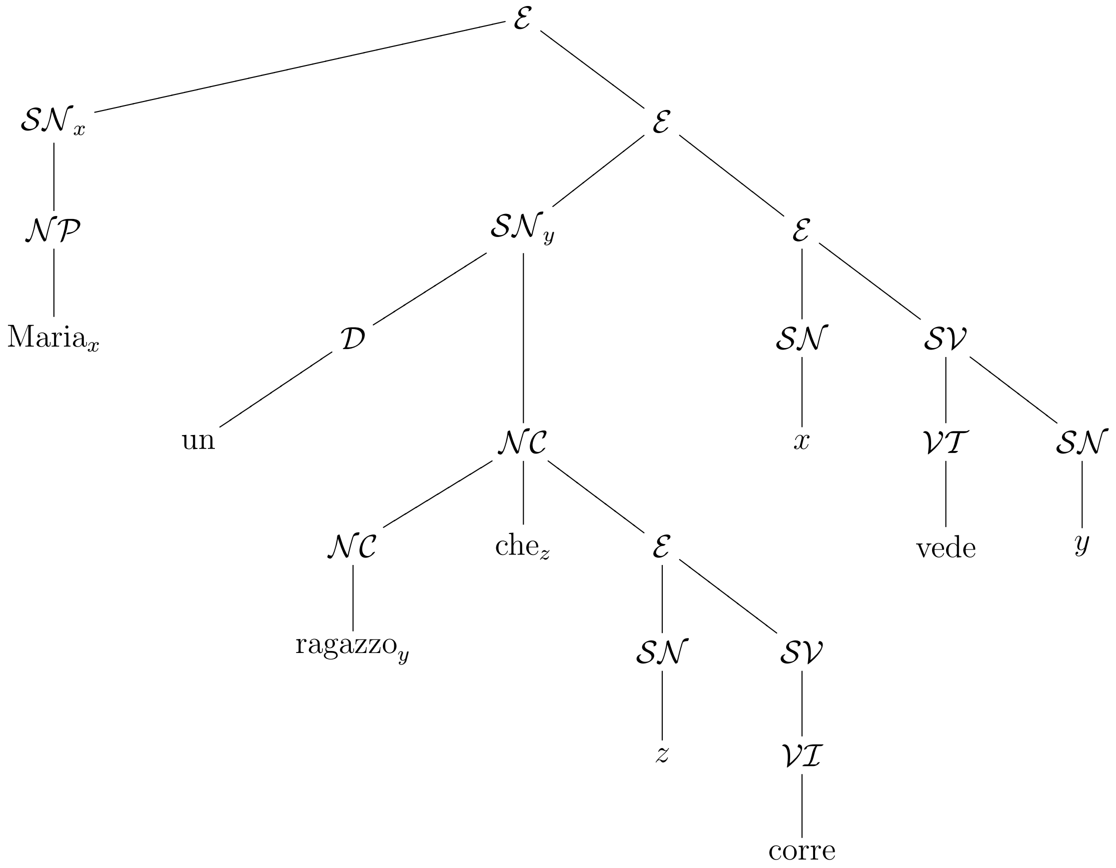
opportunamente declinato secondo appropriate regole morfologiche. Come sempre, questa è una trattazione semplificata, che produce forme logiche non sempre realizzabili (o frasi terminali non grammaticalmente corrette se la regola di proiezione non viene ristretta): ad esempio reiterate applicazioni di 18. per modificare lo stesso $\mathcal{NC}$ non sembrano essere possibili (si potrebbe facilmente ovviare a questo inconveniente modificando le regole). Inoltre non possiamo forse aspettarci che siano realizzabili sempre in modo grammaticalmente corretto i casi in cui la x ha occorrenze multiple in $\mathcal{E}$.

La 18. ha come controparte la regola semantica

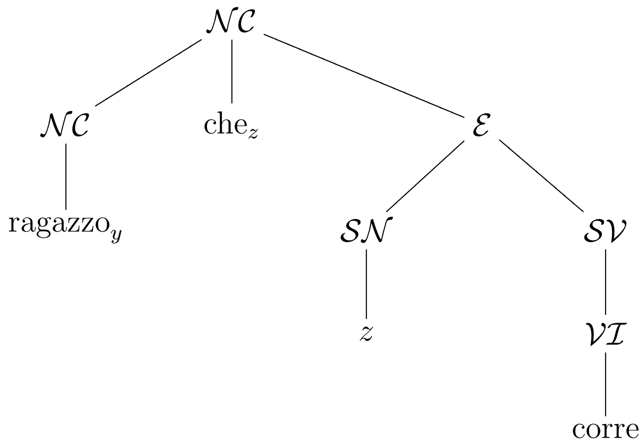
18) $[\![\ [_{\mathcal{NC}}\ \mathcal{NC}$ che$_x$ $\mathcal{E}]\ ]\!] = [\![\mathcal{NC}]\!] \wedge \{\lambda x \mid [\![\mathcal{E}]\!]\}$

Vediamone l'applicazione.

(1) *Maria vede un ragazzo che corre*



La valutazione di



è

$$= \{\lambda x \mid \utilde{\text{ragazzo}}(x)\} \wedge \{\lambda z \mid \utilde{\text{corre}}(z)\}$$

$$= \{\lambda x \mid \utilde{\text{ragazzo}}(x) \wedge \utilde{\text{corre}}(x)\}$$

Quindi $[\![$un ragazzo che corre$]\!]$ è

$$\{\lambda \mathcal{Q} \mid \{\lambda z \mid \utilde{\text{ragazzo}}(z) \wedge \utilde{\text{corre}}(z)\} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset\}$$

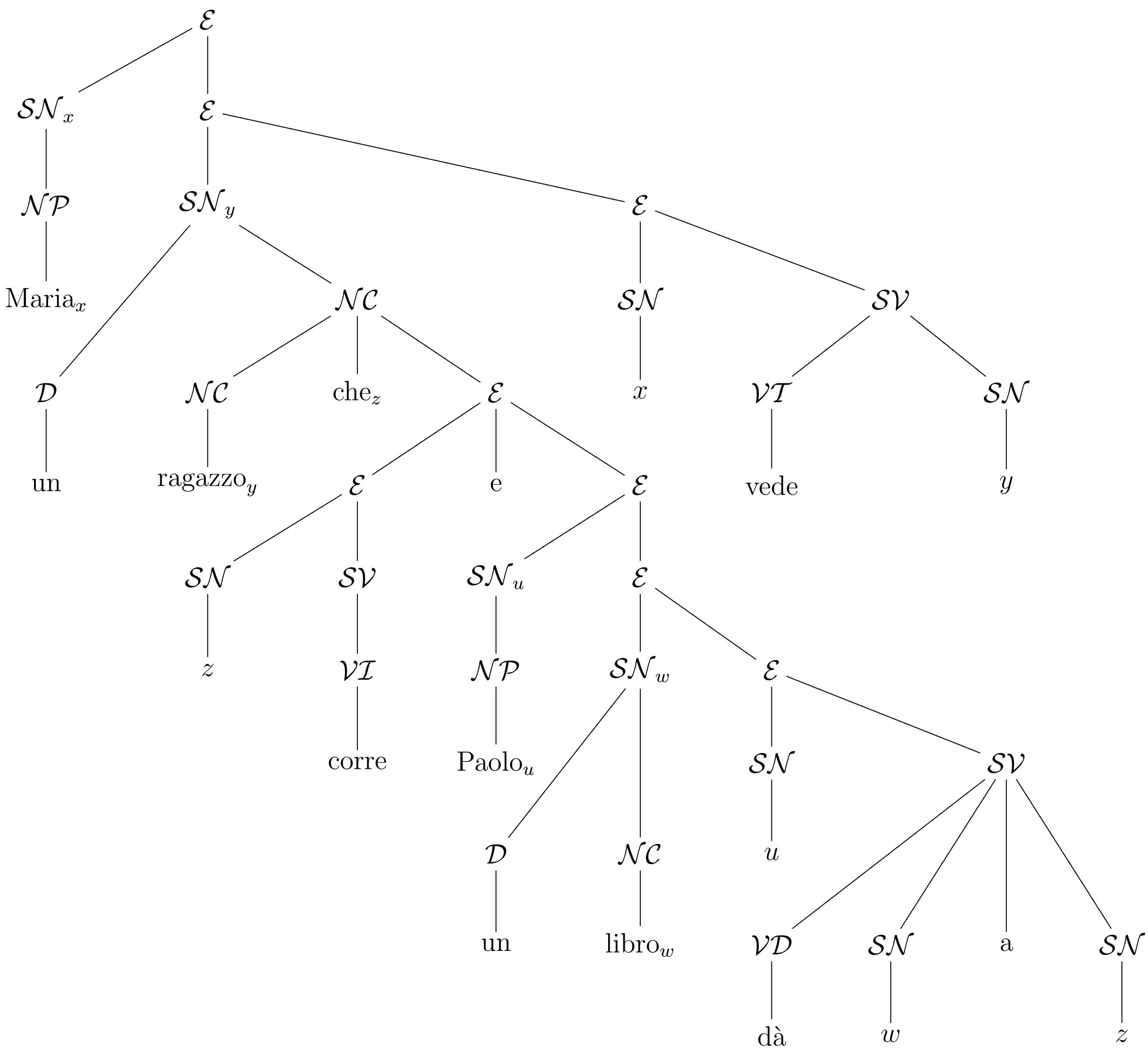
$$= \{\lambda \mathcal{Q} \mid \exists z(\utilde{\text{ragazzo}}(z) \wedge \utilde{\text{corre}}(z) \wedge \mathcal{Q}(z))\}$$

infine, sostituendo $\{\lambda y \mid \ \utilde{\text{vede}}\ (x, y)\}$ a $\mathcal{Q}$ e poi $\utilde{\text{Maria}}$ ad x, (1) viene valutata, per λ-conversione, con

$$\exists z(\utilde{\text{ragazzo}}(z) \wedge \utilde{\text{corre}}(z) \wedge \utilde{\text{vede}}(\utilde{\text{Maria}}, z)).$$

Possiamo rendere (1) più complessa considerando

(2) *Maria vede un ragazzo che corre e a cui Paolo ha dato un libro*



Risulta che ⟦un ragazzo che corre e a cui Paolo ha dato un libro⟧ viene valutato sulla formula

$$= \{\lambda x \mid \underset{\sim}{\text{ragazzo}}(x)\} \wedge \{\lambda z \mid \underset{\sim}{\text{corre}}(z)\} \wedge \exists w(\underset{\sim}{\text{libro}}(w) \wedge \underset{\sim}{\text{dà}}\,(\underset{\sim}{\text{Paolo}}, w, z))\}$$

$$= \{\lambda z \mid \underset{\sim}{\text{ragazzo}}(z) \wedge \underset{\sim}{\text{corre}}(z) \wedge \exists w(\underset{\sim}{\text{libro}}(w) \wedge \underset{\sim}{\text{dà}}\,(\underset{\sim}{\text{Paolo}}, w, z))\}$$

per cui le condizioni di verità di (2) sono date dalla formula

$$\exists z(\underset{\sim}{\text{ragazzo}}(z) \wedge \underset{\sim}{\text{corre}}(z) \wedge \exists w(\underset{\sim}{\text{libro}}(w) \wedge \underset{\sim}{\text{dà}}\,(\underset{\sim}{\text{Paolo}}, w, z) \wedge \underset{\sim}{\text{vede}}(\underset{\sim}{\text{Maria}}, z)))$$

Come si può vedere dall'esempio, riusciamo ora a processare anche frasi piuttosto complesse della lingua italiana.

Cogliamo l'occasione per fare la seguente osservazione (onde il lettore non si trovi in difficoltà con esercizi come quello appena visto): quando si opera una λ-conversione

$$\{\lambda x \mid \varphi(x)\}(t) = \varphi(t)$$

è possibile che si debbano *rinominare* variabili vincolate in φ in modo che non collidano con le variabili libere di t.

Lasciamo come esercizio l'analisi semantica dei pronomi relativi del tipo

$$\text{chi}|\text{chiunque}|\text{tutti coloro che}\ldots$$

Si calcoli, per esempio, l'interpretazione della proposizione

Chiunque studia passa gli esami.

Quanto visto non esaurisce certamente l'uso dei pronomi relativi in italiano. Il lettore analizzi, per esercizio, la proposizione seguente

Paolo, che tu hai conosciuto, sta studiando.

6 Modificatori

Abbiamo visto come le frasi relative possano modificare il significato dei nomi. Tale effetto può essere ottenuto anche mediante altri costrutti come aggettivi e sintagmi preposizionali:

ragazzo

ragazzo alto

ragazzo alto con gli occhiali

ragazzo di Milano alto con gli occhiali

...

In questi casi il $\mathcal{NC}$ "ragazzo" viene modificato aggiungendo ulteriori specificazioni la cui semantica verrà identificata con l'intersezione insiemistica di opportune classi.[14]

Aggiungiamo alle nostre categorie sintattiche la categoria $\mathcal{A}$ (degli aggettivi) e la categoria $\mathcal{P}$ (delle preposizioni). Avremo che, per esempio, "bello", "alto", ... sono aggettivi e "con", "di", ... sono preposizioni. Il metasimbolo $\mathcal{M}$ indica invece i modificatori (dei nomi).[15] Tratteremo in questo contesto anche le frasi relative (che abbiamo già visto, ma che ora analizziamo di nuovo in modo leggermente migliore, anche se semanticamente equivalente). A livello *sintattico* abbiamo le nuove regole

$$\mathcal{NC} \to \mathcal{NC} \ \mathcal{M}$$

$$\mathcal{M} \to \mathcal{A}$$

$$\mathcal{M} \to \mathcal{P} \ \mathcal{SN}$$

$$\mathcal{M} \to \ \text{che}_x \ \mathcal{E} \text{ (per ogni variabile } x\text{)}$$

Figura 7: Regole per i modificatori dei nomi

(Si noti che, cosí facendo, l'aggettivo segue sempre il nome, anche se la situazione nella lingua italiana è spesso invertita).

A livello *semantico* le espressioni α di categoria $\mathcal{A}$ sono interpretate su sottoinsiemi

$$\underset{\smile}{\alpha} : D \to \Omega$$

e le espressioni α di categoria $\mathcal{P}$ sono interpretate su relazioni

$$\underset{\smile}{\alpha} : D \times D \to \Omega$$

[14]Segnaliamo che non sempre aggettivi e sintagmi preposizionali vanno interpretati cosí (questa è una trattazione semplificata.)

[15]Esistono anche i modificatori dei verbi (per esempio gli avverbi), su cui non ci soffermiamo perché la relativa analisi semantica è più problematica.

(in questo modo $\underset{\sim}{\text{di}}\ (x, y)$ è una relazione e $\underset{\sim}{\text{di}}\ (x, \text{Mil}\underset{\sim}{\text{an}}\text{o})$ indica l'insieme delle persone milanesi).

Le regole ricorsive per l'interpretazione semantica vengono cosí estese:

$$[\![\ [_{\mathcal{A}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda x \mid [\![\alpha]\!]\}$$

$$[\![\ [_{\mathcal{P}}\ \alpha]\ ]\!] = \{\lambda y\ \lambda x \mid [\![\alpha]\!]\}$$

$$[\![\ [_{\mathcal{M}}\ \mathcal{P}\ \ \mathcal{SN}]\ ]\!] = [\![\mathcal{P}]\!]([\![\mathcal{SN}]\!])$$

$$[\![\ [_{\mathcal{M}}\ \mathcal{A}]\ ]\!] = [\![\mathcal{A}]\!]$$

$$[\![\ [_{\mathcal{M}}\ \ \text{che}_x\ \ \mathcal{E}]\ ]\!] = \{\lambda x \mid [\![\mathcal{E}]\!]\}$$

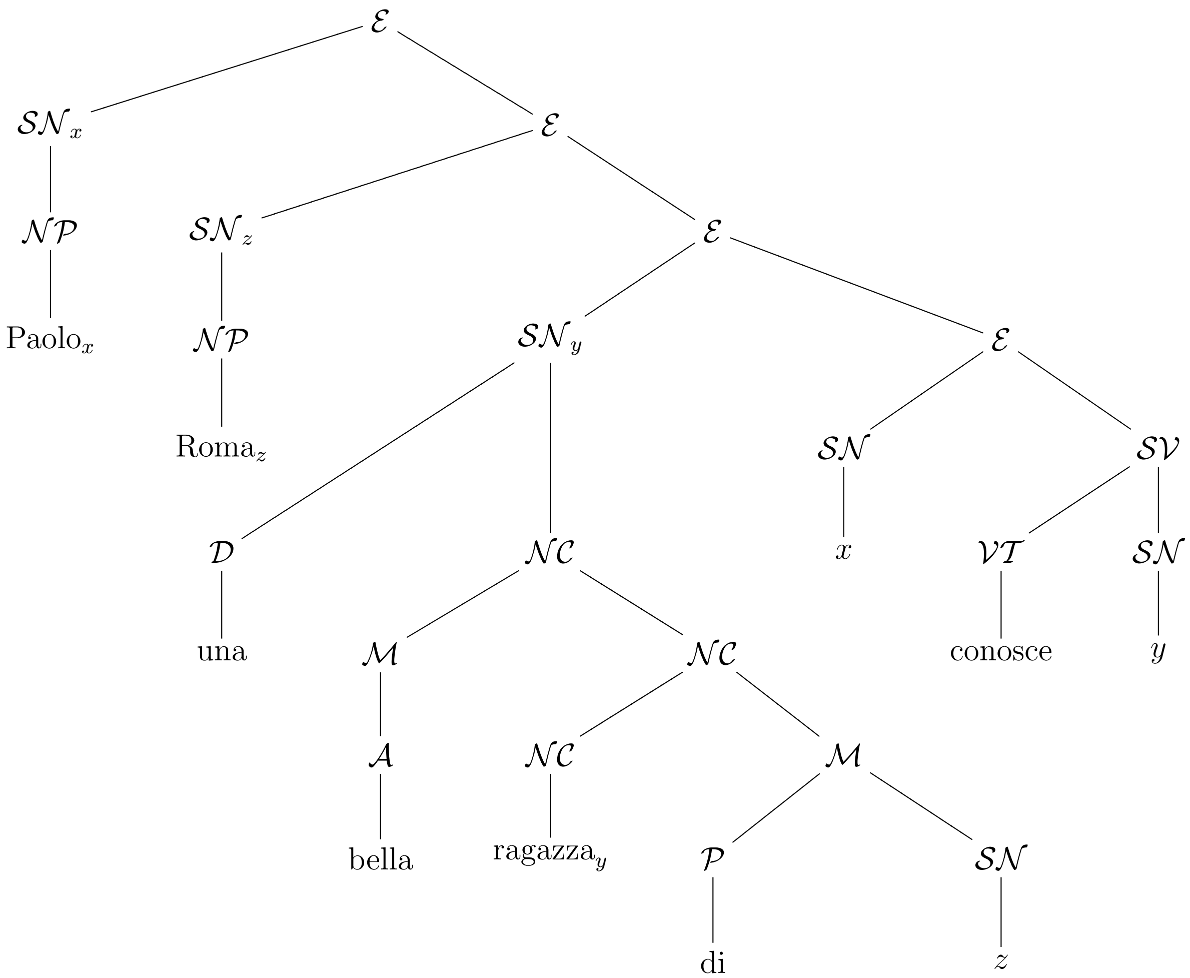
$$[\![\ [_{\mathcal{NC}}\ \mathcal{NC}\ \ \mathcal{M}]\ ]\!] = [\![\mathcal{NC}]\!] \cap [\![\mathcal{M}]\!]$$

Figura 8: Regole per l'interpretazione dei modificatori

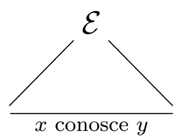
Vediamo un esempio:

(1) *Paolo conosce una bella ragazza di Roma*

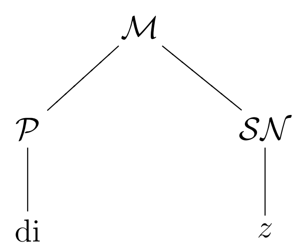
La forma logica sollevata è la seguente:



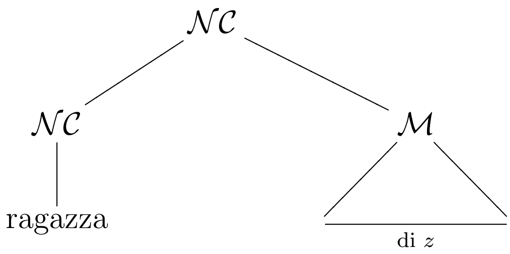
Procediamo con l'analisi: la valutazione di



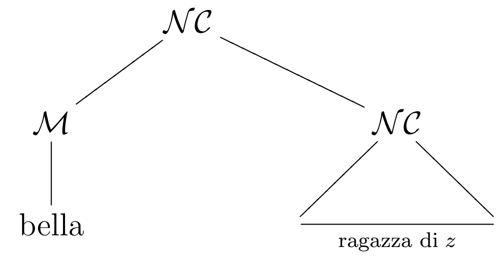
è $\underset{\sim}{\text{conosce}}(x, y)$, quella di



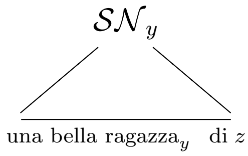
è $\{\lambda z\ \lambda y \mid \utilde{\text{di}}\ (y,z)\}(z) = \{\lambda y \mid \utilde{\text{di}}\ (y,z)\}$. Inoltre



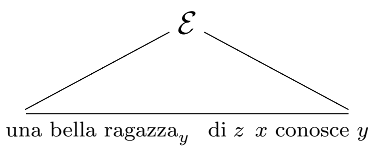
si valuta in $\{\lambda y \mid \text{ra}\utilde{\text{ga}}\text{zza}(y)\} \cap \{\lambda y \mid \utilde{\text{di}}\ (y,z)\} = \{\lambda y \mid \text{ra}\utilde{\text{ga}}\text{zza}(y) \wedge \utilde{\text{di}}\ (y,z)\}$ e



in $\{\lambda y \mid \text{b}\utilde{\text{el}}\text{la}(y)\} \cap \{\lambda y \mid \text{ra}\utilde{\text{ga}}\text{zza}(y) \wedge \utilde{\text{di}}\ (y,z)\} = \{\lambda y \mid \text{b}\utilde{\text{el}}\text{la}(y) \wedge \text{ra}\utilde{\text{ga}}\text{zza}(y) \wedge \utilde{\text{di}}\ (y,z)\}$.
Infine l'interpretazione di



è $\{\lambda \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \cap \{\lambda y \mid \text{b}\utilde{\text{el}}\text{la}(y) \wedge \text{ra}\utilde{\text{ga}}\text{zza}(y) \wedge \utilde{\text{di}}\ (y,z)\} \neq \emptyset\}$, quella di

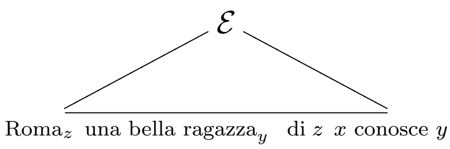


è

$$\{\lambda \mathcal{Q} \mid \mathcal{Q} \cap \{\lambda y \mid \text{b}\utilde{\text{el}}\text{la}(y) \wedge \text{ra}\utilde{\text{ga}}\text{zza}(y) \wedge \utilde{\text{di}}\ (y,z)\} \neq \emptyset\}(\{\lambda y \mid \text{co}\utilde{\text{no}}\text{sce}(x,y)\})$$

$$= \exists y(\text{co}\utilde{\text{no}}\text{sce}(x,y) \wedge \text{ra}\utilde{\text{ga}}\text{zza}(y) \wedge \text{b}\utilde{\text{el}}\text{la}(y) \wedge \utilde{\text{di}}\ (y,z))$$

e quella di



è

$$\{\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}(\mathrm{Roma})\}(\{\lambda z \mid \exists y(\mathrm{conosce}(x,y) \wedge \mathrm{ragazza}(y) \wedge \mathrm{bella}(y) \wedge \ \mathrm{di}\ (y,z))\})$$

$$= \exists y(\mathrm{conosce}(x,y) \wedge \mathrm{ragazza}(y) \wedge \mathrm{bella}(y) \wedge \ \mathrm{di}\ (y,\mathrm{Roma})).$$

Allora l'analisi di tutto l'enunciato dà:

$$\{\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{Q}(\mathrm{Paolo})\}(\{\lambda x \mid \exists y(\mathrm{conosce}(x,y) \wedge \mathrm{ragazza}(y) \wedge \mathrm{bella}(y) \wedge \ \mathrm{di}\ (y,\mathrm{Roma}))\})$$

$$= \exists y(\mathrm{conosce}(\mathrm{Paolo},y) \wedge \mathrm{ragazza}(y) \wedge \mathrm{bella}(y) \wedge \ \mathrm{di}\ (y,\mathrm{Roma})).$$

Concludiamo sottolineando il fatto che esistono proposizioni la cui analisi nei termini qui descritti può sollevare problemi. A titolo di esempio riportiamo la famosa *anafora dell'asinello*, che dimostra come, in certi contesti, il determinante "un" assuma implicitamente il valore di "ogni". Si consideri

(2) *Ogni contadino che possiede un asinello lo picchia*

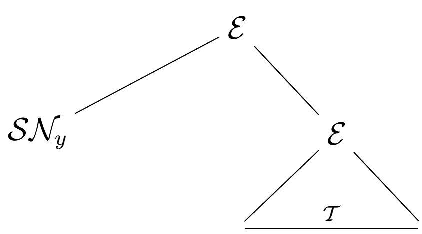
Le condizioni di verità di (2) sembrano essere correttamente riportate da

2.1) $\forall y(\mathrm{asinello}(y) \rightarrow \forall x(\mathrm{contadino}(x) \wedge \mathrm{possiede}(x,y) \rightarrow \mathrm{picchia}(x,y)))$

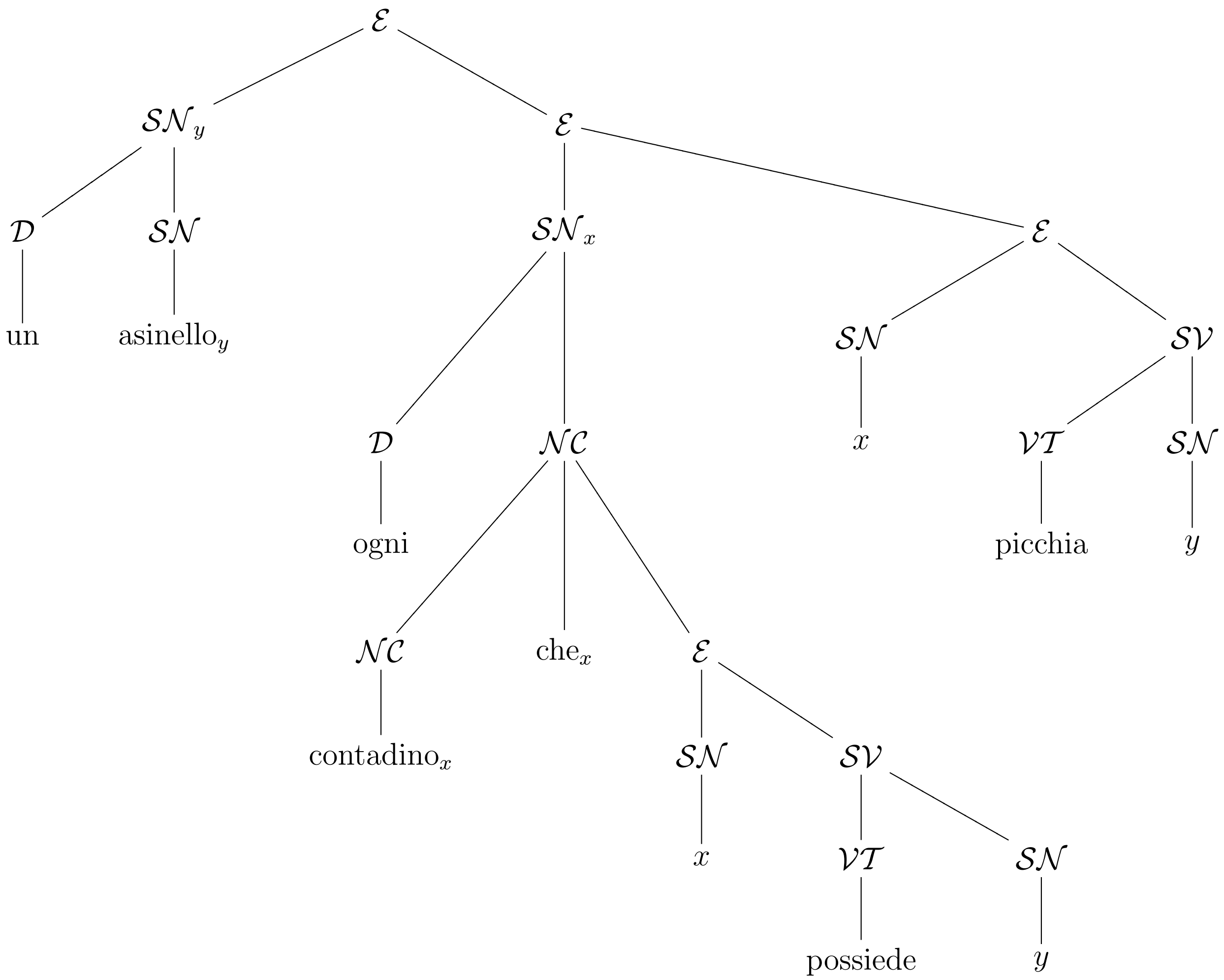
Costruire la forma logica di (2) non è semplice: "asinello" vincola il pronome "lo", ma "contadino che possiede un asinello" è un $\mathcal{NC}$ complesso (modificato dalla frase relativa) che fa da soggetto al verbo "picchiare". Per ottenere questo effetto, dobbiamo sollevare il $\mathcal{SN}$ "un asinello" al di sopra di tutta la frase: non possiamo cioè scomporre in due

$$[_{\mathcal{E}}\ [_{\mathcal{SN}_x}\text{ogni contadino}_x \text{ che possiede un asinello}_y][_{\mathcal{E}}\ x \text{ picchia } y]]$$

perché se facessimo cosí "un asinello$_y$" non sarebbe in grado di vincolare l'occorrenza di y in "x picchia y" (il $\mathcal{SN}_y$ di



vincola solo le occorrenze $\mathcal{C}$-*comandate* da esso, cioè solo quelle in $\mathcal{T}$).[16] Perciò non ci resta che procedere nel modo seguente:



L'albero sotto $\mathcal{SN}_x$ viene valutato con

$$\{\lambda\mathcal{P}\lambda\mathcal{Q} \mid \mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}\}(\{\lambda x \mid \text{cont}\underset{\sim}{\text{ad}}\text{ino}(x)\} \wedge \{\lambda x \mid \text{pos}\underset{\sim}{\text{si}}\text{ede}(x,y)\})$$

$$= \{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{cont}\underset{\sim}{\text{ad}}\text{ino}(x) \wedge \text{pos}\underset{\sim}{\text{si}}\text{ede}(x,y)\} \subseteq \mathcal{Q}\}$$

Procedendo con il nodo $\mathcal{E}$ a destra della radice, abbiamo

$$\{\lambda\mathcal{Q} \mid \{\lambda x \mid \text{cont}\underset{\sim}{\text{ad}}\text{ino}(x) \wedge \text{pos}\underset{\sim}{\text{si}}\text{ede}(x,y)\} \subseteq \mathcal{Q}\}(\{\lambda x \mid \text{pic}\underset{\sim}{\text{ch}}\text{ia}(x,y)\})$$

$$= \{\lambda x \mid \text{cont}\underset{\sim}{\text{ad}}\text{ino}(x) \wedge \text{pos}\underset{\sim}{\text{si}}\text{ede}(x,y)\} \subseteq \{\lambda x \mid \text{pic}\underset{\sim}{\text{ch}}\text{ia}(x,y)\}$$

$$= \forall x(\text{cont}\underset{\sim}{\text{ad}}\text{ino}(x) \wedge \text{pos}\underset{\sim}{\text{si}}\text{ede}(x,y) \rightarrow \text{pic}\underset{\sim}{\text{ch}}\text{ia}(x,y))$$

[16]Facendo cosí otteniamo una diversa lettura di (2) quella per cui "lo" non è coreferenziale ad "un asinello" (anche questa lettura è lecita, ma non è quella voluta).

Se ora il determinante “un” vale $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, otteniamo, valutando la radice,

$$= \{\lambda y \mid \text{asinello}(y)\} \cap \{\lambda y \mid \forall x(\text{contadino}(x) \wedge \text{possiede}(x, y) \rightarrow \text{picchia}(x, y))\} \neq \emptyset$$

$$= \exists y(\text{asinello}(y) \wedge \forall x(\text{contadino}(x) \wedge \text{possiede}(x, y) \rightarrow \text{picchia}(x, y)))$$

Questa lettura di (2) *non va bene* (ogni contadino picchia ciascuno dei propri asinelli non solo uno comune). Proponiamo la seguente *soluzione empirica*: se *per un qualche motivo misterioso* legato alla particolare struttura incassata di (2), assumiamo che “un” cambi il suo valore logico in quello di “ogni” (cioè in $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$), abbiamo:

$$= \{\lambda y \mid \text{asinello}(y)\} \subseteq \{\lambda y \mid \forall x(\text{contadino}(x) \wedge \text{possiede}(x, y) \rightarrow \text{picchia}(x, y))\}$$

$$= \forall y(\text{asinello}(y) \rightarrow \forall x(\text{contadino}(x) \wedge \text{possiede}(x, y) \rightarrow \text{picchia}(x, y)))$$

che è proprio la condizione corretta 2.1) che volevamo aspettarci.