

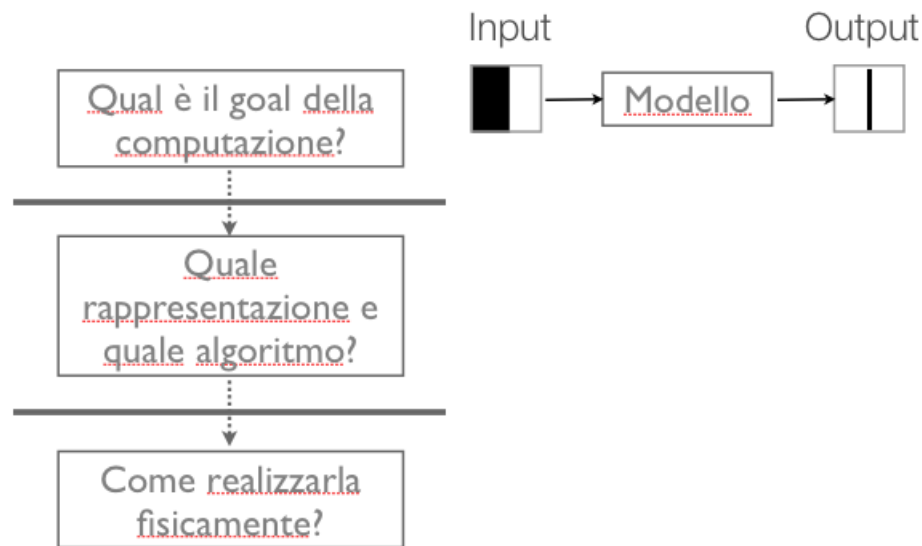
Un modello computazionale per la detezione dei bordi

Docente: Prof. Giuseppe Boccignone

Scriba:

# 1 Il problema

Il problema della modellazione di un processo di rilevamento dei bordi puo' essere riformulato secondo la metodologia di Marr come illustrato nella figura Con riferimento alla figura ,



**Figura 1:** Rilevamento dei bordi e schema di Marr

I bordi sono caratterizzati da una brusca transizione di luminanza nel dominio dello spazio  $(x, y)$  e come alte frequenze nel dominio trasformato  $(u, v)$ .

Da un punto di vista teorico (modello computazionale), possiamo pensare di caratterizzare l'operatore di detezione come un derivatore dell'immagine  $f(x, y)$ , ovvero un operatore definito mediante le operazioni di derivazione parziale

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

oppure, più opprtunamente mediante l'operatore laplaciano che gode della proprietà di essere simmetrico per rotazione

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$$

Vediamo le proprietà in frequenza di tali operatori.

Consideriamo per semplicità la trasformata di Fourier della  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} e^{-i(ux+vy)} dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} e^{-i(ux)} dx \right] e^{-i(vy)} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f(x,y) e^{-i(ux)} \Big|_{-\infty}^{\infty} + iu \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(ux)} dx \right] e^{-i(vy)} dy \\
&= iu \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(ux+vy)} dx dy \\
&= iu \mathcal{F}\left\{f(x,y)\right\} = iuF(u,v),
\end{aligned} \tag{1}$$

dove nell'integrazione per parti si è utilizzata l'ipotesi  $f(x,y) \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \pm\infty$

Analogamente:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\} = iu \mathcal{F}\left\{f(x,y)\right\} = ivF(u,v). \tag{2}$$

Derivando ulteriormente rispetto a  $x, y$  si ottiene la rappresentazione di Fourier del Laplaciano  $\nabla^2$ :

$$\mathcal{F}\left\{\nabla^2 f(x,y)\right\} = -(u^2 + v^2)F(u,v). \tag{3}$$

Le Equazioni 8, 2, 3 mostrano come le operazioni di derivazione e di laplaciano accentuano le componenti di alta frequenza spaziale ed annullano ogni eventuale componente costante di frequenza zero.

I risultati ottenuti si prestano ad un'interessante interpretazione in termini di sistemi. Riscriviamo le Equazioni 8, 2, 3 come

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right\} = iu \cdot F(u,v) = H_{\partial x}(u,v) \cdot F(u,v), \tag{4}$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\} = iv \cdot F(u,v) = H_{\partial y}(u,v) \cdot F(u,v), \tag{5}$$

$$\mathcal{F}\left\{\nabla^2 f(x,y)\right\} = -(u^2 + v^2) \cdot F(u,v) = H_{\nabla^2}(u,v) \cdot F(u,v). \tag{6}$$

In termini di rappresentazione nello spazio di Fourier di un sistema,  $H_{\partial x}, H_{\partial y}, H_{\nabla^2}$  possono essere interpretate come le funzioni di trasferimento (MTF) dei sistemi di derivazione e del sistema Laplaciano.

Possiamo allora cercare qual è la rappresentazione di tali MTF nel dominio spaziale, ovvero di quale sia la loro forma in termini di risposta impulsiva (PSF).

Sappiamo che la PSF è l'antitrasformata di Fourier della MTF. Consideriamo la  $H_{\partial x}(u,v)$ ; antitrasformando:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left\{H_{\partial x}(u, v)\right\} &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{\partial x}(u, v) e^{i(ux+vy)} dudv \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} iue^{i(ux+vy)} dudv\end{aligned}\quad (7)$$

Quest'integrale in generale non converge, tuttavia sappiamo che

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(ux+vy)} dudv = \delta(x, y); \quad (8)$$

inoltre, poichè la moltiplicazione della funzione nel dominio  $(u, v)$  per il fattore  $iu$  corrisponde ad una differenziazione rispetto a  $x$  ne risulta che

$$PSF = \frac{\partial \delta(x, y)}{\partial x} \quad (9)$$

Possiamo dare una rappresentazione intuitiva della derivata di una delta di Dirac, usando ad esempio la successione di funzioni (rispetto al parametro  $\sigma$ )

$$\delta_{\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (10)$$

e considerando la PSF definita in (11) come il limite della successione di funzioni

$$PSF = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\partial \delta_{\sigma}(x, y)}{\partial x} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} -\frac{x}{2\pi\sigma^4} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (11)$$

In alternativa, si può considerare la successione di funzioni

$$\delta_{x;\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon} (\delta(x + \epsilon, y) - \delta(x - \epsilon, y)) \quad (12)$$

rappresentante una sequenza di impulsi vicini e di opposta polarità, che intuitivamente possiamo considerare una forma generalizzata di derivazione discreta.

Ricordando che la definizione di derivata parziale rispetto a  $x$ , di  $f(x, y)$  è

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} (f(x + \epsilon, y) - f(x - \epsilon, y)), \quad (13)$$

considerando la (12) posso riscrivere la (13) come la convoluzione

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x, y) * \delta_{x;\epsilon}. \quad (14)$$

Quest'ultima ci permette di interpretare l'operazione di estrazione dei bordi, ovvero di derivazione di un'immagine, come la convoluzione dell'immagine con una distribuzione di impulsi definita da  $\delta_{x;\epsilon}$ .

Con un ragionamento analogo ed utilizzando  $\delta_\sigma$  definita in (17), l'applicazione dell'operatore Laplaciano all'immagine può essere interpretato come la convoluzione di  $f(x, y)$  con un sistema la cui PSF è definita dalla distribuzione

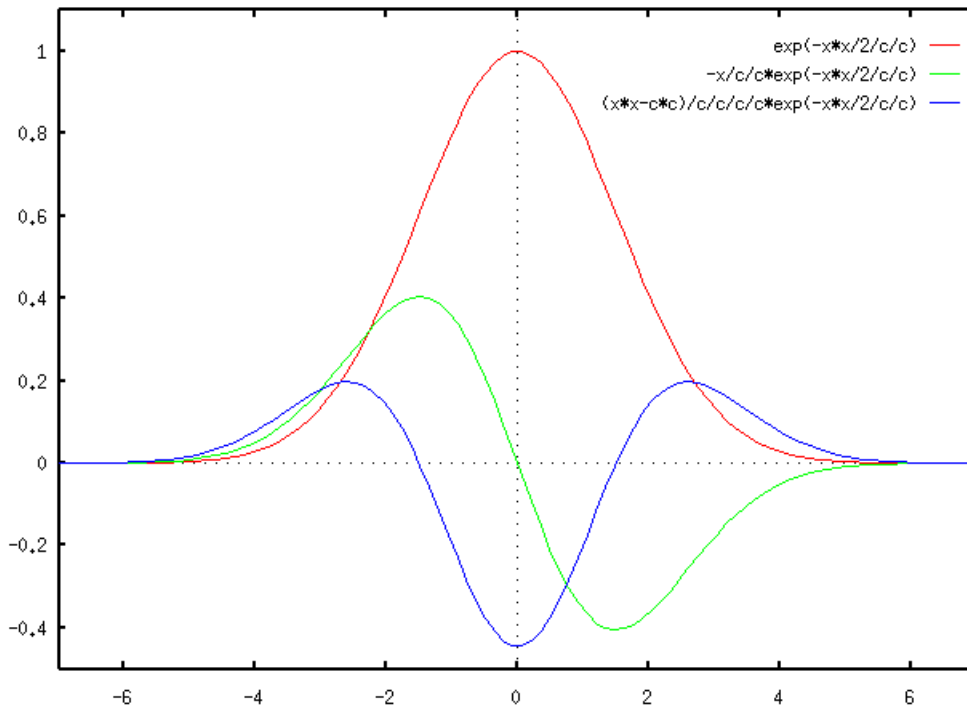
$$L_\sigma(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - \sigma^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} \quad (15)$$

ovvero

$$\nabla^2 f(x, y) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} f(x, y) * L_\sigma(x, y). \quad (16)$$

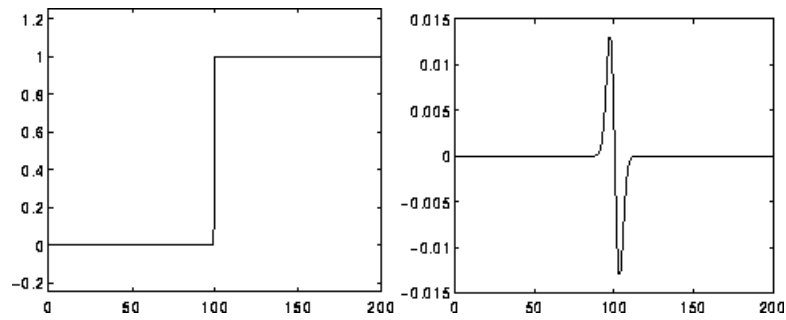
La figura mostra nel caso 1D come  $L_\sigma(x, y)$  si ottenga per doppia derivazione di una funzione Gaussiana, ovvero nel caso 2D come Laplaciano di Gaussiana (LoG)

$$L_\sigma(x, y) = \nabla^2 G(x, y; \sigma^2) \quad (17)$$



**Figura 2:** Profilo 1D del Laplaciano di una Gaussiana

Un esempio di applicazione dell'operatore ad un bordo ideale (1D) è mostrato in Fig.



**Figura 3:** Profilo 1D del risultato della convoluzione

## 2 L'algoritmo

L'algoritmo è sostanzialmente l'implementazione discreta della convoluzione  $f * L_\sigma$ . Questa può essere ottenuta utilizzando come kernel di convoluzione la matrice mostrata in Fig. 4

0	1	1	2	2	2	1	1	0
1	2	4	5	5	5	4	2	1
1	4	5	3	0	3	5	4	1
2	5	3	-12	-24	-12	3	5	2
2	5	0	-24	-40	-24	0	5	2
2	5	3	-12	-24	-12	3	5	2
1	4	5	3	0	3	5	4	1
1	2	4	5	5	5	4	2	1
0	1	1	2	2	2	1	1	0

**Figura 4:** Kernel di convoluzione per l'operatore LoG

## 3 Implementazione fisica (neurale)

E' interessante notare la forma della funzione  $L_\sigma(x, y)$

Il suo profilo è sostanzialmente quello che caratterizza la risposta di un sistema center-surround (nella fattispecie centro OFF / periferia ON) quale ad esempio una cellula gangliare

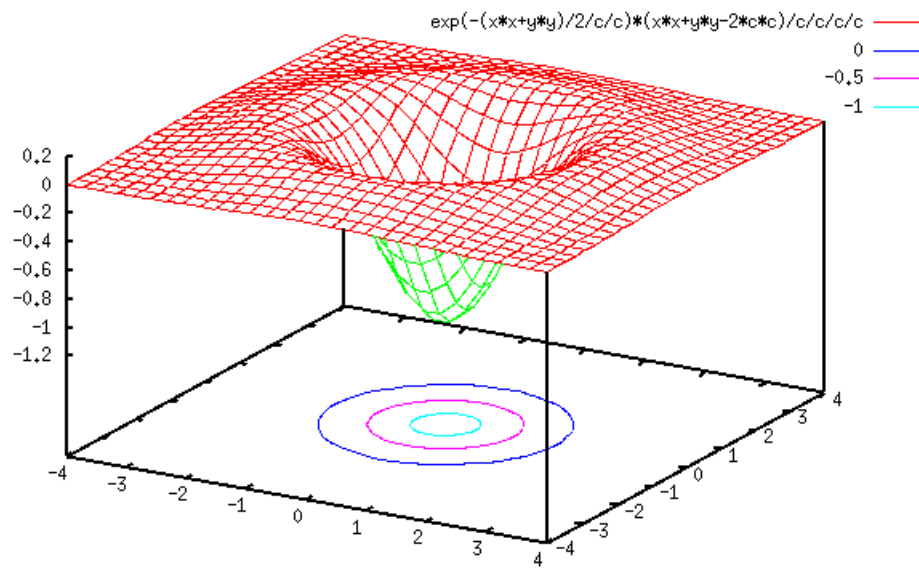


Figura 5: Laplaciano di una Gaussiana in 2D