Sistemi ottici come sistemi lineari

Corso di Principi e Modelli della Percezione

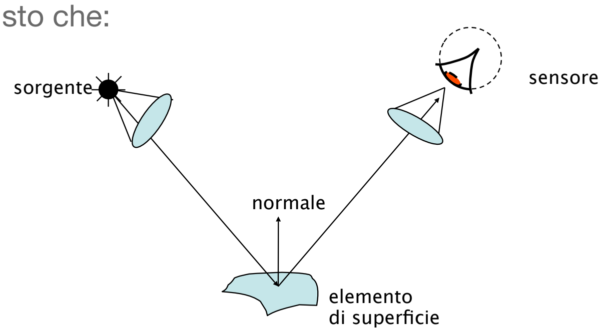
Prof. Giuseppe Boccignone

Dipartimento di Scienze dell'Informazione
Università di Milano

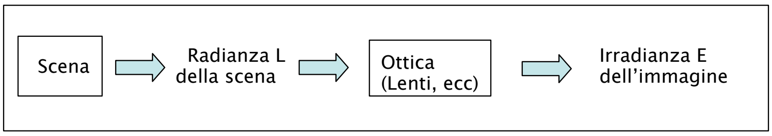
boccignone@dsi.unimi.it
http://homes.dsi.unimi.it/~boccignone/GiuseppeBoccignone_webpage/Modelli_Percezione.html

Dalla luce alle immagini

- Abbiamo visto che:

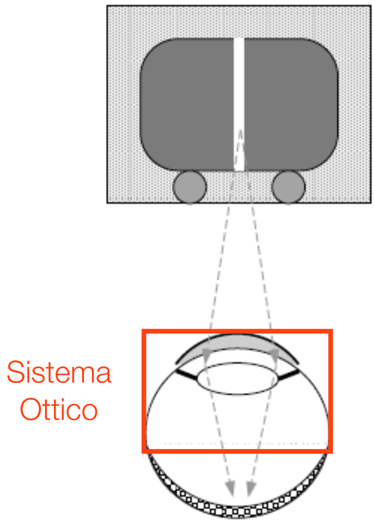


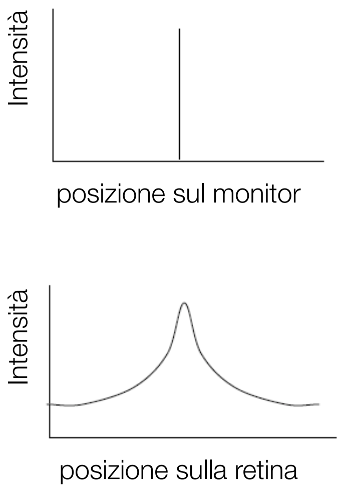
Intensità dell'immagine = f (normale, riflettanza, illuminazione)



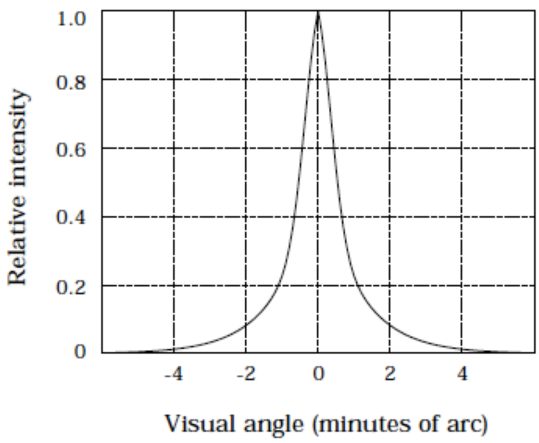
Mapping Lineare!

L'ottica dell'occhio come sistema lineare





L'ottica dell'occhio come sistema lineare //Funzione di dilatazione della linea



LSF

Figure 1.13: *An analytic approximation of the human linespread function* for an eye with a 3.0mm diameter pupil (Westheimer, 1986).

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //formalizzazione

input
immagine sul monitor

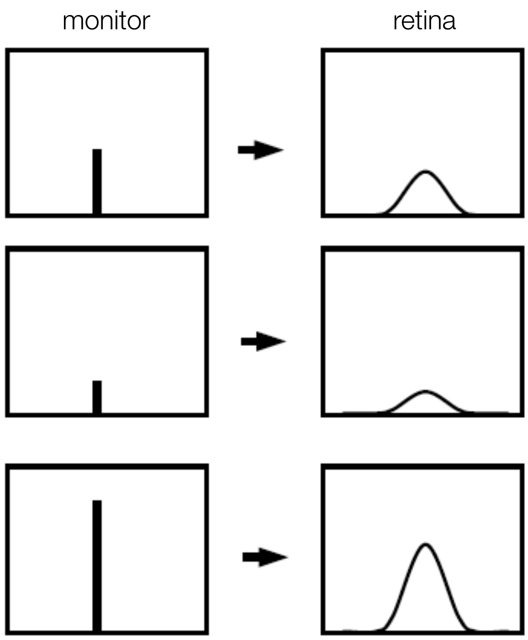
Sistema Ottico

output:
immagine sulla retina

$$f(x,y) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow g(x,y)$$

$$g = \mathcal{S}(f)$$

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //proprietà di omogeneità



L'ottica dell'occhio come sistema lineare //proprietà di omogeneità: formalizzazione

input
immagine sul monitor

Sistema
Ottico

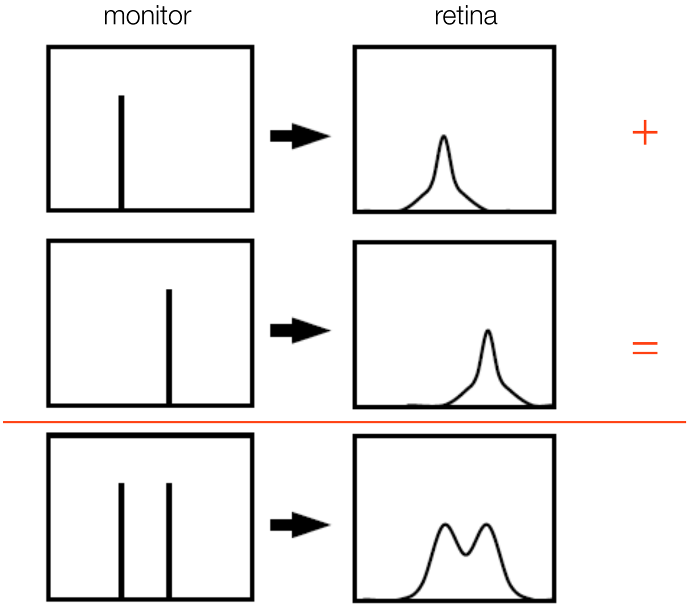
output:
immagine sulla retina

$$\alpha\, f(x,y) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow \alpha\, g(x,y)$$

$$g = \mathcal{S}(f)$$

$$\mathcal{S}(\alpha f) = \alpha \mathcal{S}(f) = \alpha g$$

L'ottica dell'occhio come sistema lineare //proprietà di sommabilità



L’ottica dell’occhio come sistema lineare //proprietà di sommabilità: formalizzazione

input
immagine sul monitor

Sistema
Ottico

output:
immagine sulla retina

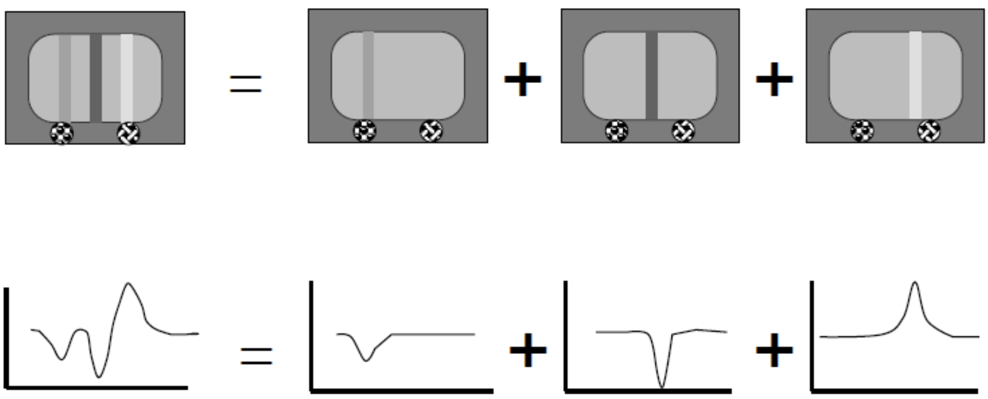
$$f_1(x,y) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow g_1(x,y)$$

$$f_2(x,y) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow g_2(x,y)$$

$$f_1(x,y)+f_2(x,y) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow g_1(x,y)+g_2(x,y)$$

$$\mathcal{S}(f_1+f_2)=\mathcal{S}(f_1)+\mathcal{S}(f_2)=g_1+g_2$$

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //sovrapposizione = omogeneità + sommabilità



se un sistema soddisfa il principio di sovrapposizione
è un **sistema lineare**

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //linearità: formalizzazione

input
immagine sul monitor

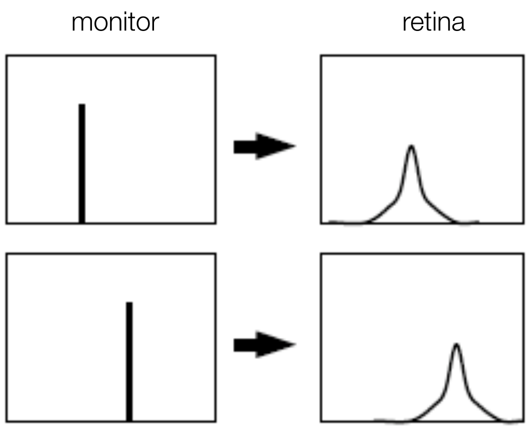
Sistema
Ottico

output:
immagine sulla retina

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$$

$$\mathcal{S}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \mathcal{S}(f_1) + \alpha_2 \mathcal{S}(f_2) = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$$

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //invarianza per traslazione



L’ottica dell’occhio come sistema lineare //invarianza per traslazione: formalizzazione

input
immagine sul monitor

Sistema
Ottico

output:
immagine sulla retina

$$f(x-a,y-b) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow g(x-a,y-b)$$

$$\mathcal{S}(f(x-a,y-b)) = g(x-a,y-b)$$

se un sistema soddisfa tutte queste proprietà è
sistema lineare spazio-invariante

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //come funziona S?

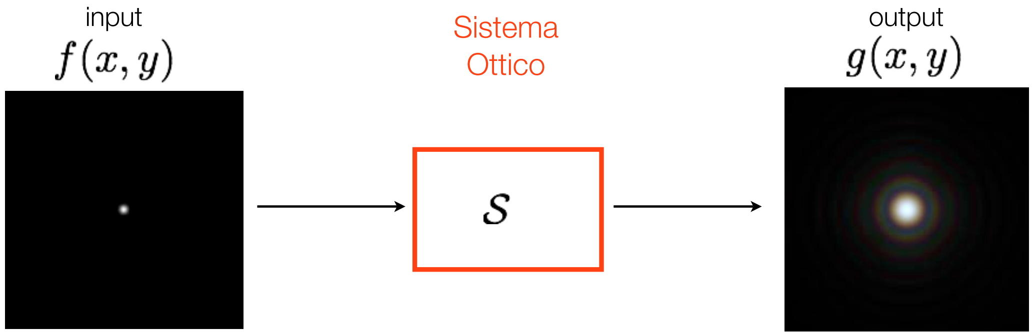
- Abbiamo caratterizzato le proprietà esterne, computazionali di S: input vs. output.
- Ma come funziona internamente? Che cos’è l’operatore S?

$$f(x,y) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow g(x,y)$$

$$g = \mathcal{S}(f)$$

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //come funziona S? funzione dilatazione del punto

- Proviamo con un esperimento semplice: diamo in ingresso un impulso luminoso



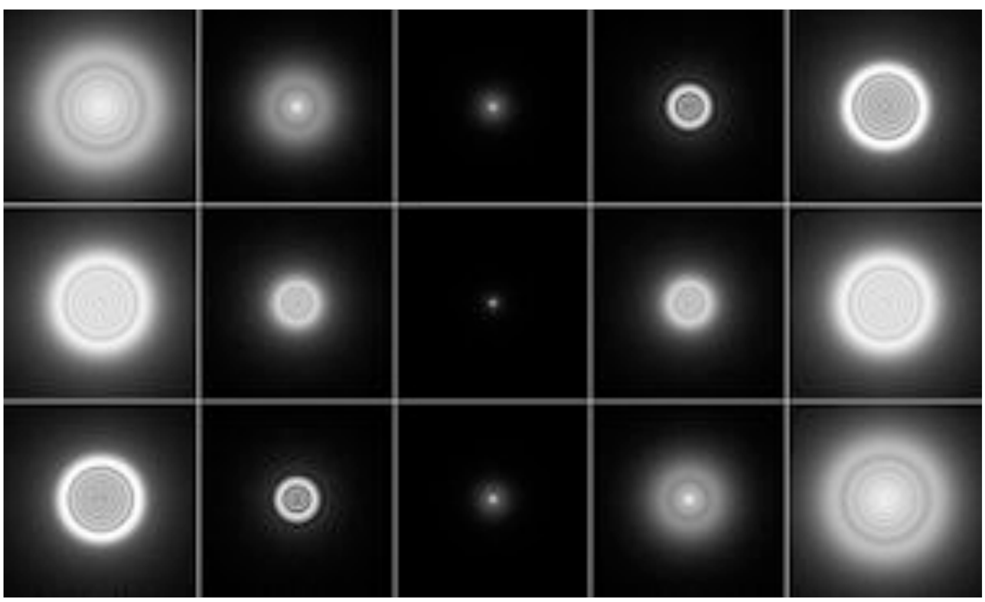
$$g = \mathcal{S}(f)$$

il minimo input che possiamo fornire al sistema è un impulso di luce, un punto luminoso

l’output che si ottiene è un punto dilatato che caratterizza la risposta del sistema all’impulso: la Point Spread Function (PSF)

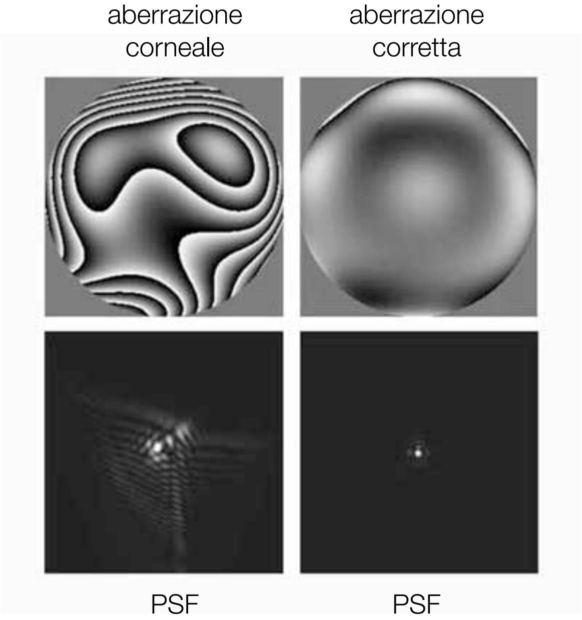
L’ottica dell’occhio come sistema lineare //funzione di dilatazione del punto

Sistemi ottici diversi sono caratterizzati da PSF diverse!



L'ottica dell'occhio come sistema lineare //funzione di dilatazione del punto

Sistemi ottici diversi sono caratterizzati da PSF diverse!

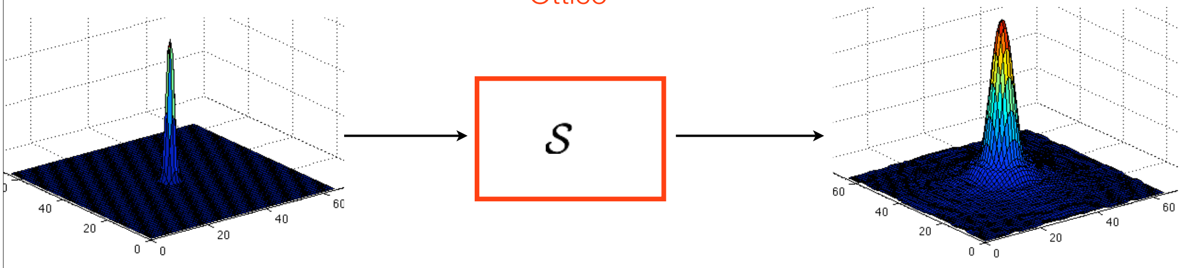


L'ottica dell'occhio come sistema lineare //funzione di dilatazione del punto

input

Sistema Ottico

output



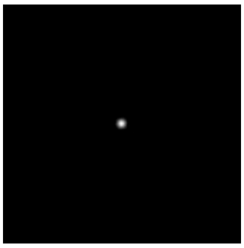
il minimo input che possiamo fornire al sistema è un impulso di luce, un punto luminoso

l'output che si ottiene è un punto dilatato che caratterizza la risposta del sistema all'impulso: la Point Spread Function (PSF)

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //sistema ideale

input

$f(x,y)$



punto luminoso

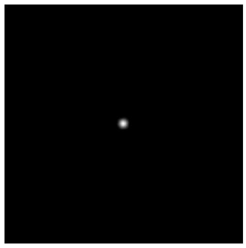
Sistema Ottico

$$\mathcal{S}$$

$$\mathcal{S}(f) = f$$

output

$f(x,y)$

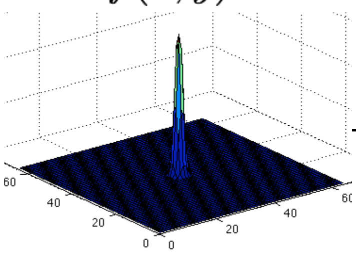


stesso punto luminoso
la Point Spread Function:
è un impulso

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //sistema ideale

input

$f(x,y)$



punto luminoso

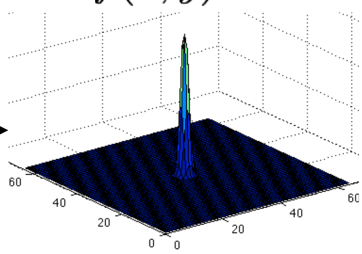
Sistema Ottico

$$\mathcal{S}$$

$$\mathcal{S}(f) = f$$

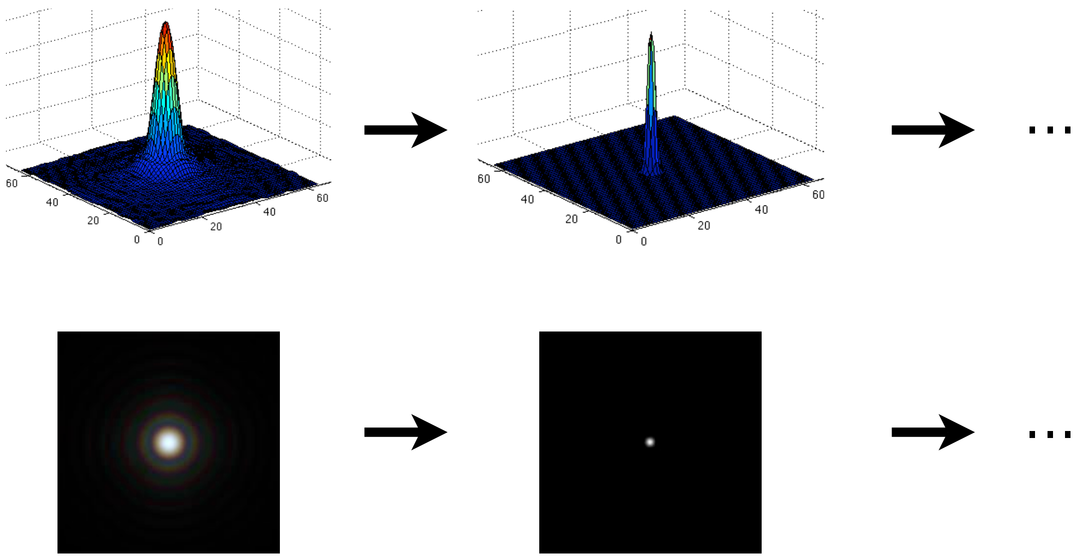
output

$f(x,y)$

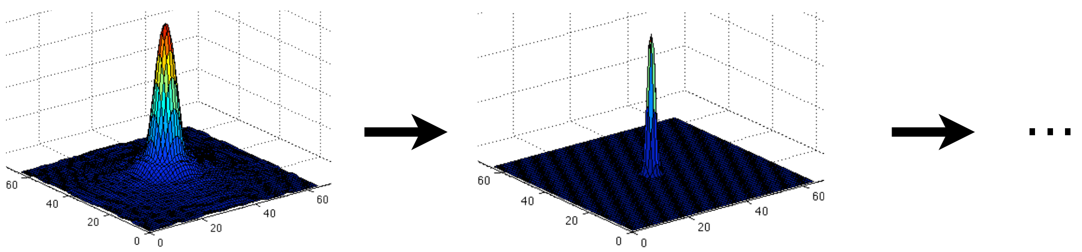


stesso punto luminoso
la Point Spread Function:
è un impulso

L’ottica dell’occhio come sistema lineare //l’impulso luminoso perfetto

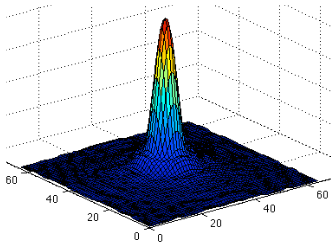


L’ottica dell’occhio come sistema lineare //l’impulso luminoso perfetto: modello



modello matematicamente
questa PSF
e poi la “restringo”

L'ottica dell'occhio come sistema lineare //l'impulso luminoso perfetto: modello



modello matematicamente questa PSF e poi la "restringo"

Posso utilizzare una funzione Gaussiana bidimensionale

$$\delta_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

$$\boxed{\delta(x,y) = \lim_{\sigma\to 0} \delta_\sigma(x,y)}$$

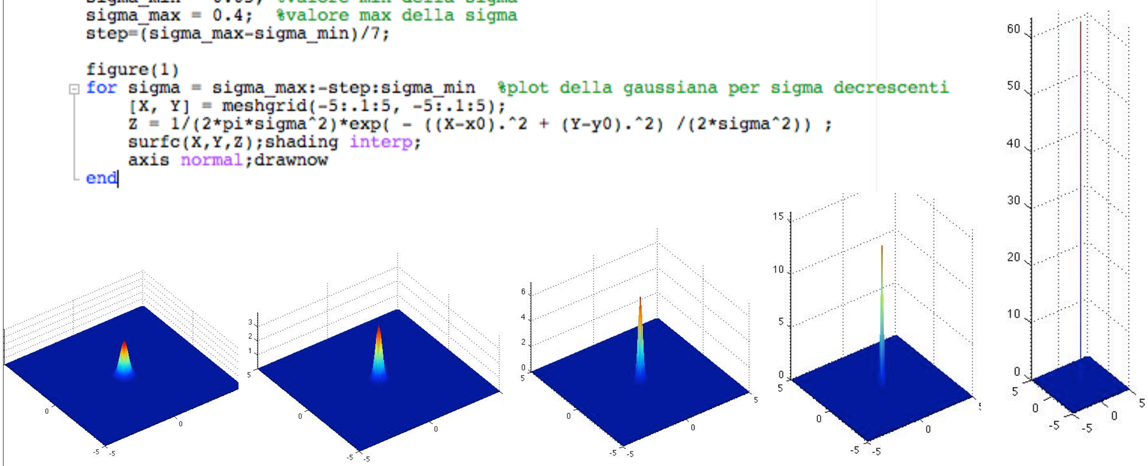
L'ottica dell'occhio come sistema lineare //l'impulso luminoso perfetto: modello

```
clear all; close all;

x0 = 0; y0 = 0; %centro della Gaussiana

sigma_min = 0.05; %valore min della sigma
sigma_max = 0.4;  %valore max della sigma
step=(sigma_max-sigma_min)/7;

figure(1)
for sigma = sigma_max:-step:sigma_min  %plot della gaussiana per sigma decrescenti
    [X, Y] = meshgrid(-5:.1:5, -5:.1:5);
    Z = 1/(2*pi*sigma^2)*exp( - ((X-x0).^2 + (Y-y0).^2) /(2*sigma^2)) ;
    surfc(X,Y,Z);shading interp;
    axis normal;drawnow
end
```



L'ottica dell'occhio come sistema lineare //l'impulso luminoso perfetto: modello

- Questa "funzione" che abbiamo definito euristicamente come la successione di funzioni $\delta_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

$$\boxed{\delta(x,y) = \lim_{\sigma \to 0} \delta_\sigma(x,y)}$$

  non è una vera e propria funzione ma una distribuzione o funzione generalizzata ed è chiamata delta di Dirac

- Intuitivamente vale 0 ovunque, fatta eccezione per l'origine dove è infinita

- Per trattarla in modo rigoroso: teoria delle distribuzioni (fuori dai nostri scopi)

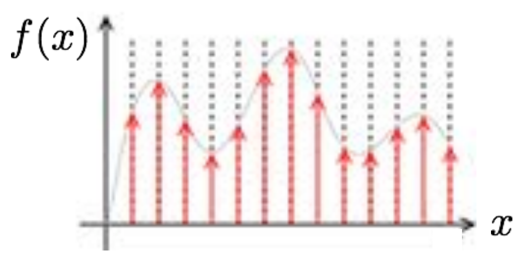
L'ottica dell'occhio come sistema lineare //l'impulso luminoso perfetto: modello

- Le proprietà che definiscono la delta di Dirac sono le seguenti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,y) dx dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta(x,y) dx dy = f(0,0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\delta(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = f(x,y)$$



L'ottica dell'occhio come sistema lineare //come funziona S?

- Ma come funziona internamente? Che cos'è l'operatore S?
- Usiamo $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\delta(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta = f(x,y)$

$$f(x,y) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow g(x,y)$$

$$\mathcal{S}(f(x,y)) = \mathcal{S}(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\delta(x-\xi,y-\eta))d\xi d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\mathcal{S}(\delta(x-\xi,y-\eta))d\xi d\eta.$$

$$\boxed{\mathcal{S}(\delta(x-\xi,y-\eta)) = \mathcal{S}(\delta(x,y)) = h(x,y)}$$ PSF

L'ottica dell'occhio come sistema lineare //come funziona S?

- Ma come funziona internamente? Che cos'è l'operatore S?
- Usiamo $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\delta(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta = f(x,y)$

$$f(x,y) \longrightarrow \boxed{\mathcal{S}} \longrightarrow g(x,y)$$

$$\mathcal{S}(f(x,y)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)h(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta$$

PSF

$x'=x-\xi, y'=y-\eta$ $$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x',y-y')h(x',y')dx'dy'$$

$$= f \otimes h$$ convoluzione

L'ottica dell'occhio come sistema lineare //come funziona S?

- Ma come funziona internamente? Che cos'è l'operatore S?
-

$$f(x,y) \longrightarrow \boxed{f \otimes h} \longrightarrow g(x,y)$$

$$\overset{\text{output}}{g} = \mathcal{S}(f) = \overset{\text{input}}{f} \otimes \overset{\text{PSF}}{h}$$

convoluzione

L'ottica dell'occhio come sistema lineare //come funziona S?

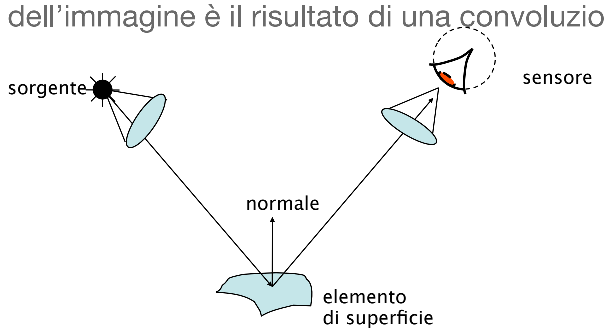
- Ma come funziona internamente? Che cos'è l'operatore S?
  - Il comportamento di un sistema lineare spazio-invariante è completamente caratterizzato dalla sua PSF
  - Data un'immagine in ingresso f, un sistema lineare spazio-invariante caratterizzato dalla PSF h, produce un'immagine in uscita g effettuando la convoluzione

$$\boxed{g = f \otimes h = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x', y-y')h(x',y')dx'dy'}$$

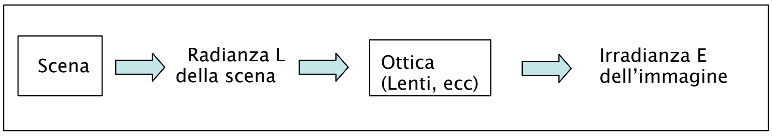
  - Conoscendo la PSF conosciamo perfettamente il sistema.

Dalla luce alle immagini

- L'irradianza dell'immagine è il risultato di una convoluzione



Intensità dell'immagine = f (normale, riflettanza, illuminazione)



Mapping Lineare!